TEMA 2 CINEMÀTICA

Objectius

Conèixer les magnituds físiques relacionades amb el moviment d'una partícula, prescindint de les causes que el provoquen, així com els diferents tipus de moviments rectilinis i circulars, i la composició de dos moviments rectilinis uniformes perpendiculars.

Índex

2.1 Vector velocitat

Conceptes bàsics

Si es vol tenir localitzada una partícula que varia la seva posició a mesura que passa el temps, es necessita conèixer l'equació del vector de posició d'aquesta en funció del temps. Si a més es vol saber si la partícula es mou més o menys ràpid es necessita conèixer la velocitat d'aquesta, que serà igual a la variació del vector de posició en el temps. Un cop dit això el que cal tenir clar és que la velocitat mitjana d'una partícula que es desplaça des d'una posició 1 a una posició 2 és el quocient entre la variació del vector de posició entre aquests dos punts i el temps que triga per anar-hi. És a dir:

$$\vec{v}_m = \frac{D\vec{r}}{Dt} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

on el vector $\vec{v}_m$ té la mateixa direcció i sentit que el vector $D\vec{r}$.

Si es fa el límit de la velocitat mitjana quan Δt tendeix a zero es troba la velocitat instantània, vector tangent a la trajectòria de la partícula. És a dir:

$$\vec{v} = \lim_{Dt \to 0} \frac{D\vec{r}}{Dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

essent la velocitat instantània la derivada del vector posició respecte el temps.

Exemple 2.1

Donat el vector de posició d'una partícula $\vec{r} = 3t\vec{i} + 2t\vec{j}$ (amb unitats del Sistema Internacional), determinar les components de la velocitat instantània.

Resolució

La velocitat instantània d'una partícula ve donada per l'expressió $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. En el nostre cas $\vec{v} = \left(3\vec{i} + 2\vec{j}\right)$m/s

Exemple 2.2

Tenim localitzada una partícula que es mou en una dimensió gràcies a l'equació de la posició d'aquesta, a saber: $x = 2t^3 + 3t^2 + 4t - 6$, on x s'expressa en centímetres i t en segons. Calcular la velocitat mitjana entre els instants de temps 2s i 6s. Expressar-la en unitats del Sistema Internacional.

Resolució

La velocitat mitjana d'una partícula entre dos punts donats 1 i 2 és:

$$v_m = \frac{Dx}{Dt} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

En el nostre cas:

$$v_m = \frac{\left(2\cdot 6^3 + 3\cdot 6^2 + 4\cdot 6 - 6\right) - \left(2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - 6\right)}{6-2} = \frac{528}{4} = 132\ \frac{cm}{s}$$

$$v_m = 132\frac{cm}{s}\cdot\frac{0.01m}{1cm} = 1.32\frac{m}{s}$$

2.2 Vector acceleració

Conceptes bàsics

En el cas de l'exemple 1, s'ha trobat que la velocitat era constant. A la majoria de situacions la velocitat és variable. La magnitud física que mesura el canvi de la velocitat en el temps s'anomena acceleració. S'ha de tenir en compte que la velocitat és una magnitud vectorial i per tant, en el temps pot canviar no només el seu mòdul, sinó també la seva direcció i el seu sentit. Es pot concloure per tant que en qualsevol moviment no rectilini hi haurà acceleració. L'acceleració mitjana d'una partícula que es desplaça des d'una posició 1 a una posició 2 és el quocient entre la variació de la velocitat entre aquests dos punts i el temps que triga per anar-hi. És a dir:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

on el vector $\vec{a}_m$ té la direcció i el sentit que depenen de les velocitats final i inicial en el període de temps mesurat.

Si es fa el límit de l'acceleració mitjana quan *Dt* tendeix a zero es troba l'acceleració instantània, és a dir:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

essent l'acceleració instantània la derivada del vector velocitat instantània respecte el temps.

Exemple 2.3

Donat el vector posició $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} - 4\vec{k}$ (amb unitats del Sistema Internacional), trobar l'acceleració instantània.

Resolució

L'acceleració instantània d'una partícula ve donada per l'expressió $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. En el nostre cas $\vec{a} = 6\vec{i}\ \frac{m}{s}$.

Exemple 2.4

La trajectòria d'una partícula que es mou en una dimensió ve governada per l'equació de la posició $x = 2t^3 + 3t^2 + 4t - 6$, (expressada en unitats del Sistema Internacional). Calcular l'acceleració mitjana entre els instants de temps 1s i 2s.

Resolució

L'acceleració mitjana d'una partícula que es mou des del punt 1 fins al punt 2 ve donada per l'expressió:

$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$. En el nostre cas:

$v = 6t^2 + 6t + 4$, per tant:

$$a_m = \frac{\left(6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 4\right) - \left(6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 4\right)}{2 - 1} = \frac{24}{1} = 24\frac{m}{s^2}$$

2.3 Moviment rectilini uniforme

Conceptes bàsics

En el moviment rectilini uniforme la partícula descriu una trajectòria rectilínia on el vector velocitat manté el mòdul, direcció i sentit invariables en el temps. Anem a veure les equacions del vector posició i del vector velocitat en funció del temps per aquest tipus de moviment.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

On $\vec{r}$ és la posició de la partícula en l'instant de temps *t*, $\vec{r}_0$ és la posició de la partícula en l'instant de temps $t = 0$, i $\vec{v}$ és la velocitat d'aquesta.

$$\vec{v} = \vec{v}_0$$

Com que el vector velocitat es manté invariable en el temps, la velocitat de la partícula en tot moment és igual a la velocitat que porta en l'instant de temps $t = 0$, és a dir, $\vec{v}_0$.

Exemple 2.5

Un corredor fa una cursa a la velocitat constant de 12 *km/h* i triga 5 *min* en arribar a la meta. Si la pista de curses és totalment recta, quants metres ha recorregut?

Resolució

L'equació de la posició d'un mòbil en un moviment rectilini uniforme ve donada per l'expressió $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$, per tant, $\vec{r} = \vec{v}t$. En el nostre cas $x = vt$.

El que cal fer primer és unificar unitats per poguer expressar el resultat en metres.

$$12\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1km}\cdot\frac{1h}{60min} = 200\frac{m}{min}$$

$$x = 200\frac{m}{min}\cdot 5min = 1000m$$

Exemple 2.6

Un ciclista que es mou sobre l'eix de les abscisses a velocitat constant, triga 2 minuts en recòrre 7200 metres. Trobar la velocitat del ciclista en unitats de metres per segon.

Resolució

S'haurà d'utilitzar l'equació $x = x_0 + vt$. En el nostre cas:

$x = vt$, per tant, $v = \frac{x}{t}$

$$2min\cdot\frac{60s}{1min} = 120s$$

$$v = \frac{7200m}{120s} = 60\frac{m}{s}$$

2.4 Moviment rectilini uniformement variat

Conceptes bàsics

En el moviment rectilini uniformement variat, la partícula descriu una trajectòria rectilínia on el vector velocitat és variable en el temps i el vector acceleració manté el mòdul, direcció i sentit invariables en el temps. Anem a veure les equacions del vector posició i del vector velocitat en funció del temps per aquest tipus de moviment.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

On $\vec{r}$ és la posició de la partícula en l'instant de temps *t*, $\vec{r}_0$ és la posició de la partícula en l'instant de temps $t = 0$, $\vec{v}_0$ és la velocitat d'aquesta en l'instant de temps $t = 0$, i $\vec{a}$ és l'acceleració.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

On $\vec{v}$ és la velocitat de la partícula en l'instant de temps *t*.
Si s'elimina el temps entre aquestes dues equacions, s'obté:

$$v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$$

On $\Delta\vec{r} = (\vec{r} - \vec{r}_0)$. Cal dir que l'acceleració pot ser positiva o negativa depenent de la força que la causa, per tant, si l'acceleració és positiva, el moviment rectilini s'anomena accelerat, i si l'acceleració és negativa aleshores el moviment rectilini s'anomena desaccelerat. En el primer cas la velocitat d'una partícula augmenta, i en el segon cas, disminueix (és l'exemple del cas d'un frenat).

Exemple 2.7

Un cotxe canvia la seva velocitat des de 50 *km/h* a 120 *km/h* en mig minut, trobar l'acceleració d'aquest en les unitats del Sistema Internacional.

Resolució

L'equació de la velocitat d'un mòbil que descriu un moviment uniformement variat és $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, per tant $\vec{a} = \dfrac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$. En el nostre cas:

$$50\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1km}\cdot\frac{1h}{3600s} = 13.9\frac{m}{s}$$

$$120\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1km}\cdot\frac{1h}{3600s}=33.3\frac{m}{s}$$

$$0.5min\cdot\frac{60s}{1min}=30s$$

$$a=\frac{33.3-13.9}{30}=\frac{19.4}{30}=0.6\frac{m}{s^2}$$

Exemple 2.8

Es deixa caure un tomàquet des d'una alçada de 20*m*. Trobar la velocitat quan arriba a terra.

Resolució

La pedra descriu un moviment de caiguda lliure en l'eix de l'ordenada, per tant serà un moviment rectilini uniformement accelerat amb acceleració constant, la de la gravetat. L'equació que cal utilitzar per trobar el temps que triga el tomàquet en arribar a terra és:

$y=y_0+v_{0y}t+\frac{1}{2}gt^2$. En el nostre cas:

$0=20-\frac{1}{2}\cdot 9.8\cdot t^2$, per tant

$-20=-4.9\cdot t^2$, és a dir, $20=4.9\cdot t^2$, aleshores:

$t^2=\frac{20}{4.9}=4.1$, $\Rightarrow$ t = 2s, temps que triga el tomàquet en arribar a terra.

Utilitzant ara l'equació de la velocitat del moviment uniformement accelerat s'obté:

$v=v_0+gt$, per tant:

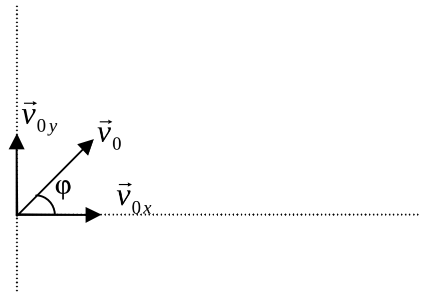
$$v=9.8\cdot 2=19.6\frac{m}{s}$$

2.5 Composició del moviment rectilini uniforme i del rectilini uniformement variat

Conceptes bàsics

L'estudi del moviment d'un projectil en un llançament oblic es realitza composant dos moviments rectilinis en uns eixos de coordenades *xy*. L'un és uniforme en l'eix de les abscisses i l'altre uniformement variat en l'eix de les ordenades. S'ha de tenir en compte que la única força que actua sobre el cos és el pes, per tant en tot moment l'acceleració d'aquest cos és la de la gravetat, $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}\,\frac{m}{s^2}$. Per desenvolupar un problema d'aquestes característiques, el que s'ha de fer primer és expressar el vector velocitat inicial en les seves components cartesianes (veure dibuix).

Si v_0 és el mòdul del vector velocitat inicial, aleshores:



$$\vec{v}_0 = v_0 \cdot \cos j\,\vec{i} + v_0 \cdot sin j\,\vec{j} = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$$

aleshores les equacions del moviment són:

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

i

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 .$$

La velocitat del projectil en qualsevol instant es trobarà de la següent manera:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = v_{0x}\vec{i} + \left(v_{0y} - gt\right)\vec{j}$$

on

$$v_x = v_{0x}$$

i

$$v_y = v_{0y} - gt$$

Exemple 2.9

Es tira una pedra, cap abaix, des d'un turó d' alçada $300m$ respecte el terra, formant un angle de 60º amb la vertical. Si la velocitat inicial és de 5*m/s*, trobar el temps que triga en arribar a terra.

Resolució

L'equació del vector de posició d'un moviment rectilini uniformement accelerat és:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

En el nostre cas aquest moviment es localitza en l'eix de l'ordenada, per tant:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 .$$

on

$$v_{0y} = v_0 \cdot \cos 60^\circ = 5 \cdot 0.5 = 2.5\frac{m}{s}$$

Quan la pedra arriba a terra, y=0, aleshores, s'ha de resoldre l'equació de segon grau següent:

$0 = 300 – 2.5t –4.9\ t^2$

i, per tant,

$t = 7.6s$

Exemple 2.10

Des de dalt d'una torre de 45*m* d'alçada es llança una fletxa cap a munt amb una velocitat de 200*m/s* formant un angle de 60º amb la vertical. Trobar l'alçada màxima i l'abast de la fletxa.

Resolució

El primer que cal fer és calcular les components cartesianes del vector velocitat inicial. En el nostre cas:

$$v_{0x} = 200 \cdot sin60^\circ = 173.2\frac{m}{s}$$

i

$$v_{0y} = 200 \cdot \cos 60^\circ = 100\frac{m}{s}$$

Quan la fletxa assoleixi l'alçada màxima, la coordenada y de la velocitat, v_y, valdrà zero, per tant, a partir de l'equació de la velocitat d'un moviment rectilini uniformement variat es pot calcular el temps que trigarà la fletxa en assolir l'alçada màxima.

$$v_y = v_{0y} - gt\ , \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{100}{9.8} = 10.2s$$

Substituint aquest temps en l'equació de la posició de l'eix de l'ordenada es troba l'alçada màxima.

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 .$$

$$y_{màx} = 45 + 100 \cdot 10.2 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (10.2)^2 = 555.2m$$

Quan la fletxa arriba a terra, $y = 0$, per tant, utilitzant l'equació de la posició en l'eix de l'ordenada es troba el temps requerit per aconseguir-ho.

$$0 = 45 + 100 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot t^2$$

Resolent aquesta equació de segon grau es troba que el temps que triga la fletxa en arribar a terra és:

$t = 20.8s$.

Substituint aquest temps en l'equació de la posició en l'eix de les abscisses s'obté l'abast de la fletxa, és a dir, la distància respecte el peu de la torre.

$$x = x_0 + v_{0x}t = 173.2 \cdot 20.8 = 3607.8m \approx 3.6km \text{ x}$$

2.6 Moviment circular

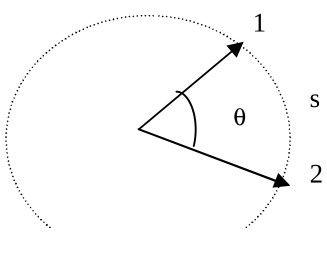
Conceptes bàsics

La trajectòria d'una partícula que descriu un moviment circular és una circumferència. Si la partícula es desplaça des d'un punt 1 fins a un punt 2 (veure el dibuix), es defineix la velocitat angular mitjana com l'angle central escombrat pel radi, anomenat desplaçament angular (expressat en unitats de radiant en el Sistema Internacional, essent el radiant adimensional), dividit pel temps que triga la partícula per anar des del punt 1 fins al punt 2, és a dir:

$$w_m = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1}$$

Si fem el límit quan *Dt* tendeix a zero s'obté la velocitat angular instantània:

$$w = \frac{dq}{dt}$$



La unitat de la velocitat angular en el Sistema d'unitats Internacional és el radiant per segon, *rad/s*. En alguns casos, aquesta velocitat ve donada en unitats de *rpm*, que vol dir, revolucions dividit per minut, essent una revolució igual a 2π radiants. Cal recordar que el desplaçament angular és igual a l'arc *s* (magnitud lineal), descrit per la partícula, dividit pel radi *R* de la circumferència, és a dir:

$$q = \frac{s}{R} \quad ; \quad s = q \cdot R$$

per tant:

$$v = w \cdot R \quad \text{ja que} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

L'acceleració angular mitjana d'una partícula que es desplaça des d'una posició 1 a una posició 2 és el quocient entre la variació de la velocitat angular entre aquests dos punts i el temps que triga per anar-hi. És a dir:

$$a_m = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{w_2 - w_1}{t_2 - t_1}$$

Si fem el límit quan *Dt* tendeix a zero s'obté l'acceleració angular instantània:

$$a = \frac{dw}{dt}$$

La unitat de l'acceleració angular en el Sistema d'unitats Internacional és el radiant per segon al quadrat, *rad /s2*.

Exemple 2.11

L'equació del desplaçament angular d'una partícula que dóna voltes sobre una circumferència de radi $R = 3m$ ve donada per l'expressió $q = 4t^2 + 3t$. Trobar la velocitat lineal i l'acceleració angular en el instant $t = 2s$. (Les unitats de *q* és el radiant, i el temps ve expressat en segons).

Resolució

Ja s'ha comentat que l'arc descrit per la partícula en un moviment circular és una magnitud lineal, per tant:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

on $s = R \cdot q = 3m \cdot (4t^2 + 3t) rad = (12t^2 + 9t)\ m$, per tant:

$v = (24t + 9)\dfrac{m}{s}$. Quan el temps és igual a $t = 2s$, aleshores:

$$v(2) = 57\frac{m}{s}.$$

Com que:

$$a = \frac{dw}{dt}, \text{ i } w = \frac{dq}{dt}, \text{ aleshores:}$$

$$w = (8t + 3)\frac{rad}{s}, \text{ i } a = 8\frac{rad}{s}, \text{ per tant l'acceleració angular és constant.}$$

Exemple 2.12

Una mota de pols es diposita a una distància de 3*cm* del centre d'un disc de radi 14*cm*, el qual es troba donant voltes sobre un tocadiscs a la velocitat angular de $w = 45$ *rpm*. Trobar en unitats del Sistema Internacional la velocitat lineal de la mota de pols. Si aquesta hagués caigut sobre la perifèria del mateix disc, quina velocitat lineal portaria?

Resolució

Primer cal passar les unitats de la velocitat angular a unitats del Sistema Internacional.

$$w = 45rpm = 45\frac{rev}{min}\cdot\frac{2p rad}{1rev}\cdot\frac{1min}{60s} = 1.5p\,\frac{rad}{s}.$$

La velocitat lineal i angular d'una partícula estan relacionades mitjançant l'expressió:

$$v = w\cdot R$$

En el primer cas $R = 0.03m$, i en el segon cas, $R = 0.14m$, per tant:

$$v = 1.5\cdot p\cdot 0.03 = 0.14\frac{m}{s}$$

i

$$v = 1.5\cdot p\cdot 0.14 = 0.66\frac{m}{s}$$

Cal adonarse'n que malgrat la mota de pols gira a la mateixa velocitat angular en ambdós casos, la velocitat lineal és diferent, depenent on es troba aquesta respecte l'eix de rotació

2.7 Moviment circular uniforme

Conceptes bàsics

La partícula que descriu un moviment circular uniforme té la velocitat angular constant, i per tant el mòdul del vector velocitat lineal també ho és. Les equacions del desplaçament i la velocitat angular en funció del temps són les següents:

$$q = q_0 + wt$$

i

$$w = w_0$$

on q i w són el desplaçament i velocitat angular respectivament en un instant de temps t, i q_0 i w_0 són el desplaçament i velocitat angular respectivament en l'instant de temps $t = 0$.

Cal remarcar que en un moviment circular uniforme, malgrat sigui constant el mòdul del vector velocitat lineal, no ho és la seva direcció. L'acceleració centrípeta o normal $\vec{a}_c$ és la magnitud física que mesura la variació de la direcció del vector velocitat. Aquesta acceleració és perpendicular a la trajectòria de la partícula i va dirigida cap al centre de la trajectòria circular. El mòdul de $\vec{a}_c$ ve donat per:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = w^2 \cdot R$$

Exemple 2.13

Si estem escoltant la bona música del disc de l'exemple 2.12 durant 10min, calcular el desplaçament angular total que ha descrit aquest en unitats del Sistema Internacional.

Resolució

El disc descriu un moviment circular uniforme, per tant:

$q = q_0 + wt$, en el nostre cas:

$$t = 10min \cdot \frac{60s}{1min} = 600s$$

aleshores:

$$q = 1.5p \cdot 600 = 900prad$$

Exemple 2.14

Trobar l'acceleració centrípeta que adquireix un nen que ha pujat a les voladores de fires quan aquestes giren a una velocitat angular de 0.5π *rad/s*, i la distància radial és de 3*m*.

Resolució

L'acceleració centrípeta ve donada per l'expressió:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = w^2 \cdot R = 2.47 \cdot 3 = 7.4 \frac{m}{s^2}$$

2.8 Moviment circular uniformement variat

Conceptes bàsics

En aquest tipus de moviment el que és invariable és l'acceleració angular, mentre que la velocitat angular canvia en el temps. Les equacions del desplaçament i la velocitat angular en funció del temps són les següents:

$$q = q_0 + w_0 t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

i

$$w = w_0 + at$$

Si s'elimina el temps entre les dues equacions, s'obté:

$$w^2 = w_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta q$$

essent $Dq = q - q_0$

Cal dir que les equacions del moviment circular uniforme i del circular uniformement variat són anàlogues respectivament a les del moviment rectilini, només canviant les magnituds lineals per les angulars.

En aquest tipus de moviment el vector velocitat lineal té el mòdul i la direcció variables. La magnitud que mesura la variació del mòdul de la velocitat és l'acceleració tangencial $\vec{a}_t$, i aquesta és tangent a la trajectòria de la partícula. L'expressió del mòdul de $\vec{a}_t$ ve donada per:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \;, \Rightarrow \quad a_t = R \cdot a$$

L'acceleració tangencial és perpendicular a l'acceleració centrípeta, i ambdues són les components del vector acceleració, per tant, es pot escriure:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

essent el mòdul del vector acceleració el següent:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

Exemple 2.15

El disc d'una politja de 30*cm* de radi, inicialment en repòs, gira amb una acceleració angular constant de 1.5 *rad/s2* durant 20*s*. Trobar el nombre de voltes efectuades per aquesta politja.

Resolució

L'equació del desplaçament angular d'un moviment circular uniformement accelerat ve donada per:

$$q = q_0 + w_0 t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

En el nostre cas, q_0 = 0, i w_0 = 0, per tant:

$$q = \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot (20)^2 = 300 rad$$

aleshores:

$$300 rad \cdot \frac{1 volta}{2 prad} = 47.7 voltes\ .$$

Exemple 2.16

Una moto que surt del repòs descriu un looping circular de radi 200*m* assolint els 100*km/h* en 0.5 minuts, trobar l'acceleració total de la moto transcorregut aquest temps.

Resolució

El que cal fer primer és unificar unitats:

$$100 \frac{km}{h} \cdot \frac{1000 m}{1 km} \cdot \frac{1 h}{3600 s} = 27.8 \frac{m}{s}\ .$$

$$0.5 min \cdot \frac{60 s}{1 min} = 30 s$$

Per trobar l'acceleració total $\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$ cal buscar les seves components vectorials.

El mòdul de l'acceleració tangencial és:

$$a_t = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{27.8}{30} = 0.9\frac{m}{s^2}.$$

El mòdul de l'acceleració centrípeta és:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(27.8)^2}{200} = 3.9\frac{m}{s^2}.$$

El mòdul de l'acceleració total és:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = 4\frac{m}{s^2}.$$

La direcció del vector acceleració total es pot trobar calculant l'angle que forma aquest amb el vector $\vec{a}_t$:

$$j = \text{arctg}\frac{a_c}{a_t} = \text{arctg}\frac{3.9}{0.9} = 77^\circ$$

Problemes

2.1 Una partícula descriu una trajectòria definida pel vector de posició $\vec{r} = 8t\vec{i} + (2t - 4)\vec{j}$, en unitats del Sistema Internacional, determinar el mòdul de la velocitat instantània.

2.2 Un tren circula per una via rectilínia i es coneix en tot moment la seva posició gràcies a l'equació $x = 3t^3 + 2t^2 - t + 14$, on x ve mesurada en metres i t en segons. Trobar en unitats del Sistema Internacional la posició i la velocitat quan $t = 2s$.

2.3 Un mòbil descriu una trajectòria sobre l'eix de les abscisses determinada per l'equació següent: $x = 5t^2 - 2t + 2$,on x ve mesurada en metres i t en segons. Calcular en unitats del sistema cegessimal l'acceleració en l'instant $t = 4s$.

2.4 Una partícula es mou sobre l'eix de les abscisses segons l'equació: $x = t^3 + 4t - 6$. Les unitats de x són els mil·límetres i les de t segons. Determinar la velocitat mitjana entre l'interval de temps 2s i 6s i expressar-la en unitats del sistema cegessimal.

2.5 Un patinador que circula a 15 *km/h* s'incorpora a una cursa que es desenvolupa sobre una pista recta quan els contrincants ja han recorregut 100*m* des de la sortida. Si el nostre patinador espavilat triga 3 minuts en arribar a la meta, quin recorregut total té la pista?

2.6 Un camió que circula a la velocitat de 80 *km/h* travessa un pont rectilini per evitar el semàfor de la carretera que passa per sota. El pont forma un angle de 30º respecte la carretera. Després de 3 minuts, que és el temps que triga en travessar el pont, el camioner gira el cap 150º a l'esquerra i veu un restaurant, així que encara el camió cap allà i s'hi acosta en línia recta. Quants metres ha hagut de recórrer el camió per arribar al restaurant un cop ja havia travessat el pont?

2.7 Col·loquem un gos famolenc al començament d'un tub de gran diàmetre i 10 metres de longitud, i al final d'aquest tub i posem menjar. El gos , inicialment parat, arriba al final del tub amb una velocitat de 12 *km/h* . Trobar l'acceleració del pobre gos.

2.8 Es tira una pilota cap a munt, perpendicularment al terra amb una velocitat inicial de 42 *m/s*. Trobar el temps que estarà pujant.

2.9 Es llença una pedra cap a munt, perpendicularment al terra amb una velocitat inicial de 38 *m/s*. Quina alçada assolirà?.

2.10 Un nen, jugant tira el seu nino cap a munt, perpendicularment al terra amb una velocitat inicial de 15 *m/s*. Quant temps haurà d'esperar el nen per agafar el seu nino i porta'l al col·legi?

2.11 Al nen del problema anterior, li fa gràcia arribar al col·legi per dir-li a la senyoreta l'instant en que el seu nino anava a la velocitat de 10 *m/s*, però no ho sap calcular. L'ajudes?

2.12 Des del terrat d'un edifici es deixa anar una ceba (per Sant Joan) i triga 5 segons en arribar al carrer. Quina alçada té l'edifici?

2.13 Un nen fa córrer un camió de joguina sobre la taula de la cuina d'alçada 0.9*m*. El camió surt disparat de la taula a la velocitat de 10 *m/s*. El que pretén el nen és que el camió caigui dins d'una paperera que es troba a terra, a 3*m* de la taula. Ho aconseguirà?

2.14 Un estudiant d'enginyeria li agrada anar per pedregals amb la seva bicicleta de muntanya, però un dia, la roda posterior de la bicicleta llençà una pedra cap enrera a la velocitat de 40 *km/h*, amb un angle de 30º sobre l'horitzontal. Determinar l'alçada màxima que assolirà la pedra.

2.15 En el problema anterior la pedra no porta perill, a menys que darrera de l'estudiant el segueixi un company a uns 3*m* de distància, també amb bicicleta de muntanya, a la velocitat de 35 *km/h* , portant la mateixa direcció i sentit que l'estudiant. Esbrinar si la pedra tocarà al noi del darrera (que no té cap culpa).

2.16 Una partícula descriu la trajectòria d'un cercle de radi 250 *cm* segons l'equació següent: $q = 2t^2-4t + 6$, q expressat en radiants i t en segons. Determinar l'acceleració tangencial de la partícula, expressada en unitats del Sistema Internacional, en l'instant de temps t = 3*s*.

2.17 Segons l'equació de la trajectòria circular del problema anterior, calcular la velocitat angular, així com l'acceleració centrípeta i angular, expressades en el Sistema Internacional, en l'instant de temps t = 10*s*.

2.18 Una atracció de fires dóna voltes descrivint un cercle amb una acceleració angular constant. La velocitat angular en els dos primers segons és de 90 radiants per segon. Trobar l'acceleració i el desplaçament angular en aquest període de temps.

2.19 Les rodes d'un camió giren amb una velocitat angular constant de $w = 100$ *rad/s*. El conductor veu un obstacle sobre la carretera i frena, trigant 2*s* en aturar-se. Calcular l'acceleració angular amb la qual frena.

2.20 Un tractor inicialment en repòs es desplaça durant 90*s*. Les rodes del tractor, de 100*cm* de radi giren amb una acceleració angular de 1*rad/s2* durant 60*s*, mantinent la velocitat adquirida durant els 30*s* restants. Determinar la velocitat final del tractor i el nombre de voltes efectuades per una roda.

Solucions

2.1 v = 8.25 m/s

2.2 $x(2)$ = 44 m, $v(2)$ = 43 m/s

2.3 $a = 10^3$ cm/s^2

2.4 v_m = 5.6 cm/s

2.5 l = 850.6 m

2.6 x = 3461 m

2.7 a = 0.56 m/s^2

2.8 t = 4.3 s

2.9 $y_{màx}$ = 73.7 m

2.10 t = 3 s

2.11 t_1 = 0.5 s, t_2 = 2.6 s

2.12 y = 122.5 m

2.13 El camió toca al terra a 4.2m de la taula enlloc de 3m.

2.14 $y_{màx}$ = 1.58 m

2.15 Sí

2.16 a_t = 10 m/s^2

2.17 $w(10)$ = 36 rad/s, $a_c(10)$ = 3240 m/s^2, $a(10)$ = 4 rad/s^2

2.18 a = 45 rad/s^2, $q - q_0$ = 90 rad

2.19 a = -50 rad/s^2

2.20 $v = 60$ m/s, nºvoltes = 573 voltes