# TEMA 3 CAUSES DEL MOVIMENT. DINÀMICA I

## Objectius

Una vegada estudiada la descripció del moviment, podem passar a estudiar les causes que l'originen (forces) i les lleis que el governen. Veurem les forces que actuen sobre cossos, dibuixarem el diagrama del sòlid lliure i aplicarem les lleis de Newton per la resolució dels problemes.

## Índex

3.1 Força.
3.2 Forces a distancia.
3.3 Forces de contacte.
3.4 Les lleis de Newton. Diagrama del sòlid lliure

## 3.1 Força

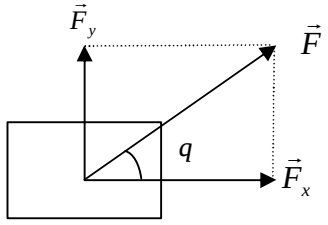
### Conceptes bàsics

Un objecte es posa en moviment quan és empès o arrossegat per una *força* o hi està sotmès.

La força és una magnitud vectorial que resulta determinada per:

- el mòdul o intensitat de la força
- la direcció
- el sentit
- el punt d'aplicació

Exemple:




mòdul:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

on: $\vec{F}_x$ i $\vec{F}_y$ són les components rectangulars de la força, $\vec{F}$

direcció i sentit:

$$q = arctg \frac{F_y}{F_x}$$

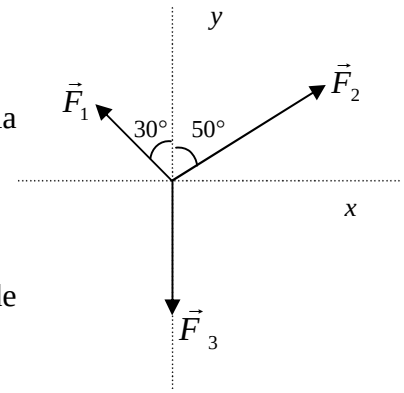
La força $\vec{F}$ també es pot escriure en forma vectorial en funció dels vectors unitaris $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. En aquest cas:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

La unitat de *força* en el Sistema Internacional és el Newton (N), 1 N = 1 kg·m/s$^2$

**Exemple 3.1**

Calculeu la força resultant del sistema de forces de la figura on $F_1$=10 N, $F_2$=20 N y $F_3$=30 N




**Resolució**

Descomponem les forces segons els eixos de coordenades *xy* que s'han escollit:

$$F_{1x} = F_1\, sen\, 30°, F_{2x} = F_2\, sen\, 50°$$
$$F_{1y} = F_1\, cos\, 30°, F_{2y} = F_2\, cos\, 50°, F_{3y} = F_3$$

$$F_x = F_{2x} - F_{1x}, \qquad F_x = 15.3 - 5 = 10.3 \text{ N}$$
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} - F_3, \qquad F_y = 8.7 + 12.8 - 30 = -8.5 \text{ N},$$

El signo negatiu indica que aquesta component està dirigida segons la part negativa del l'eix *y*.

El mòdul de la força resultant és:

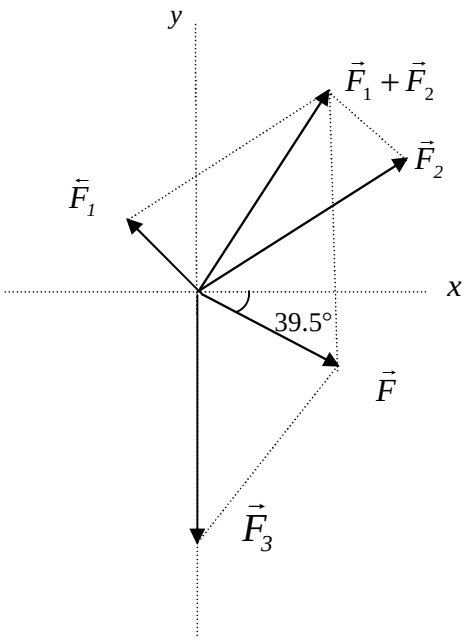
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 13.4 \text{ N}$$

La direcció y el sentit de la força resultant és : $q = arctg \frac{F_y}{F_x}$, θ = -39.5° respecte a l'eix *x*

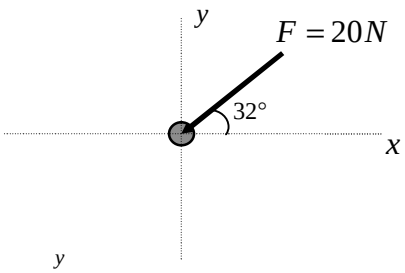
Podem expressar la força resultant en funció dels vectors unitaris $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = \left(10.3\vec{i} - 8.5\vec{j}\right) \text{ N}$$

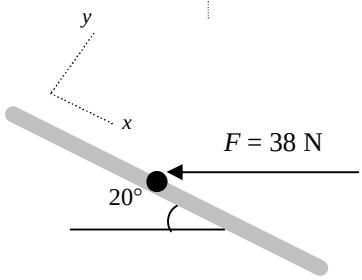
Gràficament és:



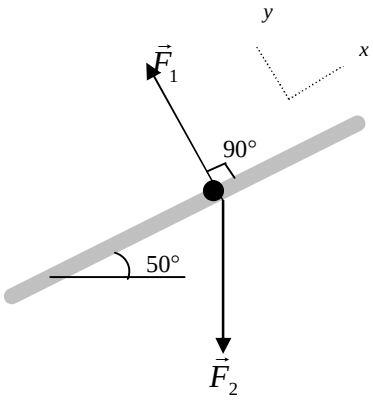
## Problemes




3.1 Descomponeu la força de la figura següent segons les direccions *x* i *y*. Calculeu les seves components.



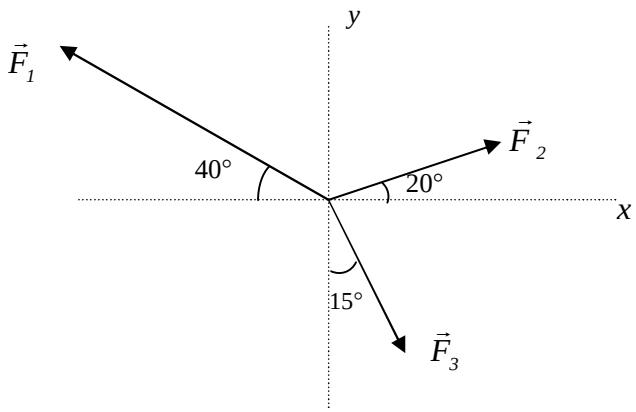

3.2 a) Descomponeu la força aplicada sobre el punt de la superfície de la figura següent segons la direcció perpendicular i paral·lela a la superfície.
b) Calculeu les seves components.
c) Comproveu a partir de les components que *F* = 38 N




3.3 Calculeu la força resultant del sistema de forces aplicat sobre el punt indicat a la superfície de la figura, on $F_1$ = 10 N i $F_2$ = 40 N.

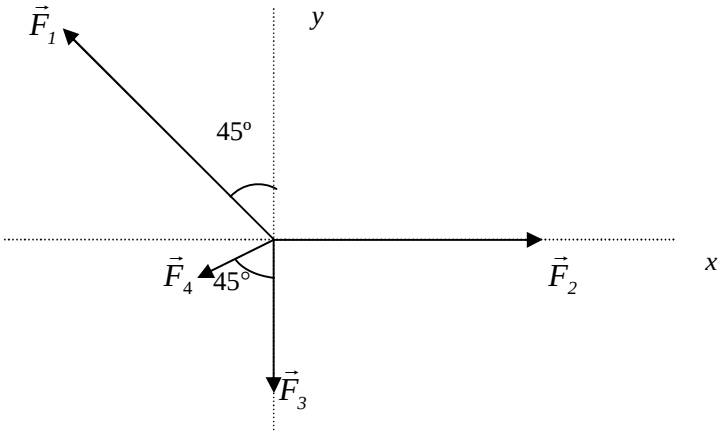
3.4 Calculeu la força resultant del sistema de forces de la figura següent:

$F_1 = 50N$
$F_2 = 20N$
$F_3 = 30N$

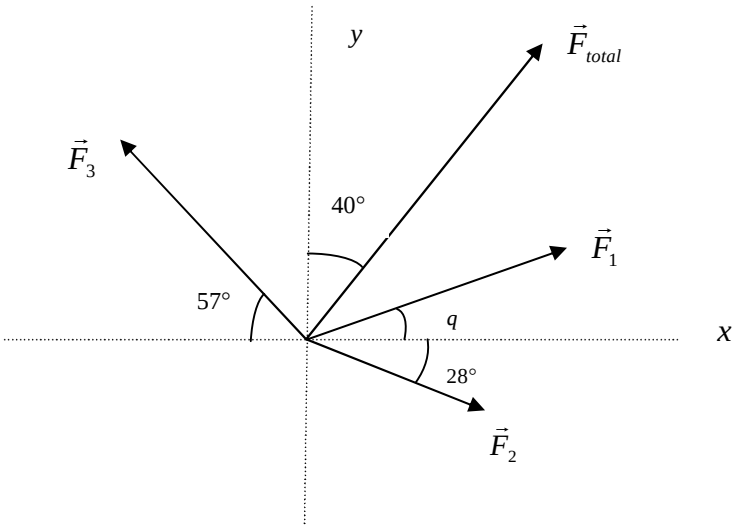


3.5 Calculeu la resultant del sistema de forces indicat a la figura:

$F_1 = 100$ N
$F_2 = 80$ N
$F_3 = 40$ N
$F_4 = 60$ N

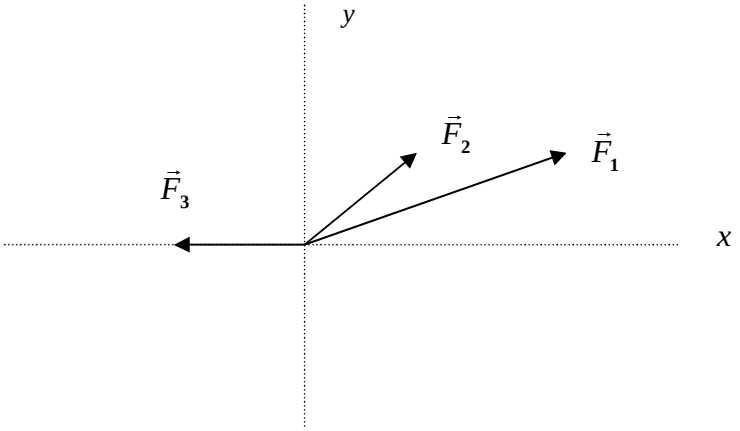



3.6 Calculeu la força $\vec{F}_1$ del sistema de forces de la figura següent, on el mòdul de la força resultant, $\vec{F}_{total}$, val 150 N y les forces $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ tenen de mòdul 40 N i 75 N, respectivament.

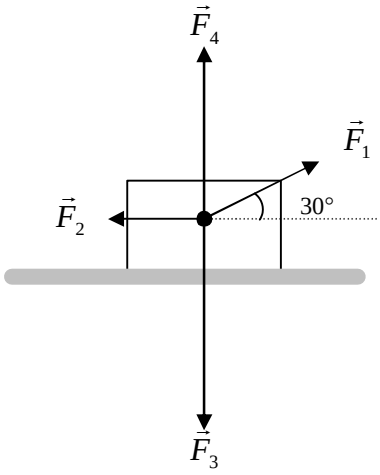



3.7 Calculeu el mòdul, la direcció y el sentit de la força resultant formada per dues forces concurrents de mòduls 200 N y 300 N que formen angles de 60° y 80°, respectivament, amb l'eix horitzontal, *x*.

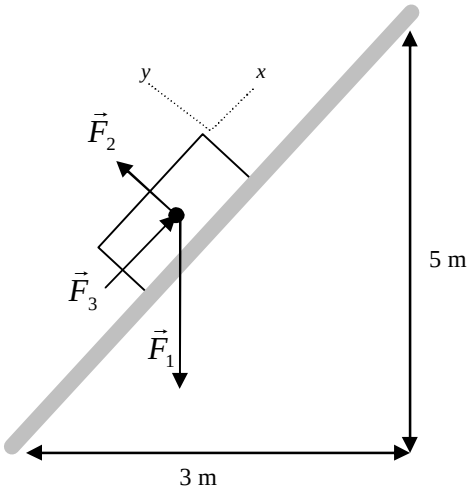
3.8 Calculeu la resultant del sistema de forces de la figura, on els mòduls de les forces són, $F_1$ = 250 N i $F_2 = F_3$ = 100 N. Els angles que formen les forces amb l'eix horitzontal són: 30°, 45° i 180°, respectivament.



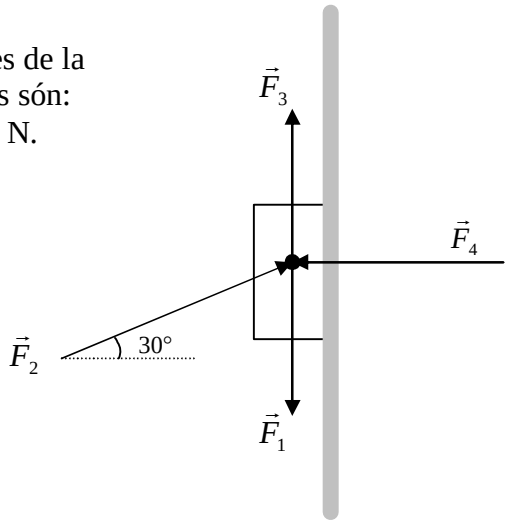

3.9 Calculeu la força resultant del sistema de forces que actua sobre el punt indicat en l'objecte de la figura. Els valors del mòduls de les forces aplicades són: $F_1$ = 10 N, $F_2$ = 8.66 N, $F_3$ = 30 N i $F_4$ = 25 N.



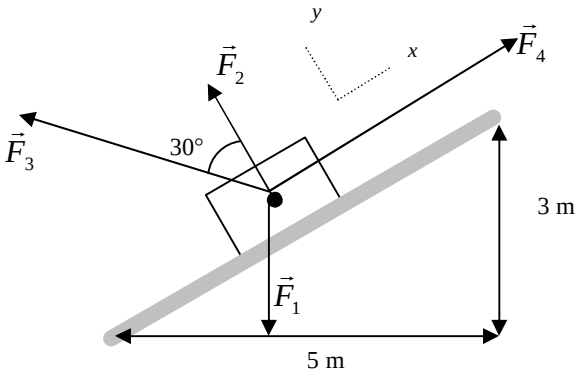

3.10 Calculeu la força resultant del sistema de forces que actua sobre el punt indicat en l'objecte de la figura. La força $\vec{F}_2$ forma 90° amb la superfície inclinada, $\vec{F}_3$ és paral·lela a la superfície i $\vec{F}_1$ és paral·lela al costat de 5 m. Els mòduls de les forces aplicades són: $F_1$ = 100 N i $F_2$ = 51.5 N i $F_3$ = 40 N.



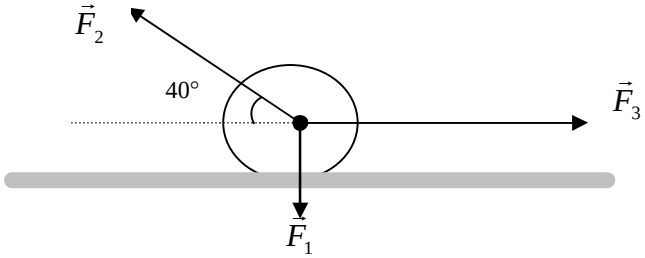
3.11 Calculeu la força neta del sistema de forces de la figura. Els valors dels mòduls de les forces són: $F_1$ = 30 N, $F_2$ = 40 N, $F_3$ = 10 N i $F_4$ = 20 N.



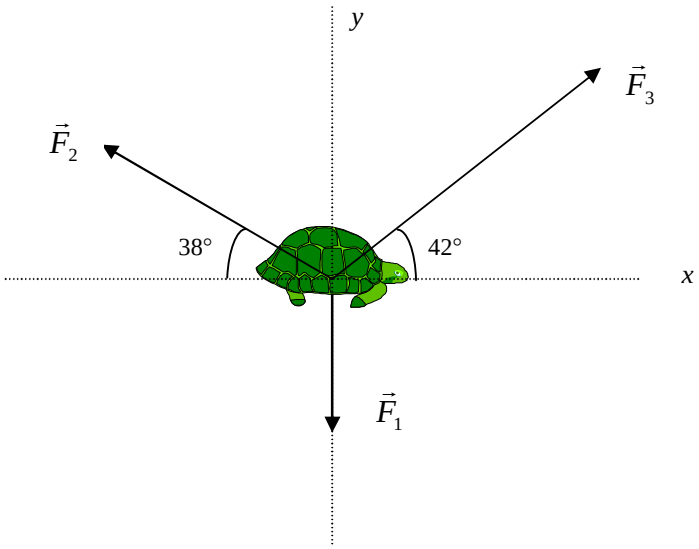

3.12 Calculeu la força total exercida sobre el punt de la figura. $F_1$ = 20 N, $F_2$ = 30 N, $F_3$ = 50 N i $F_4$ = 70 N.



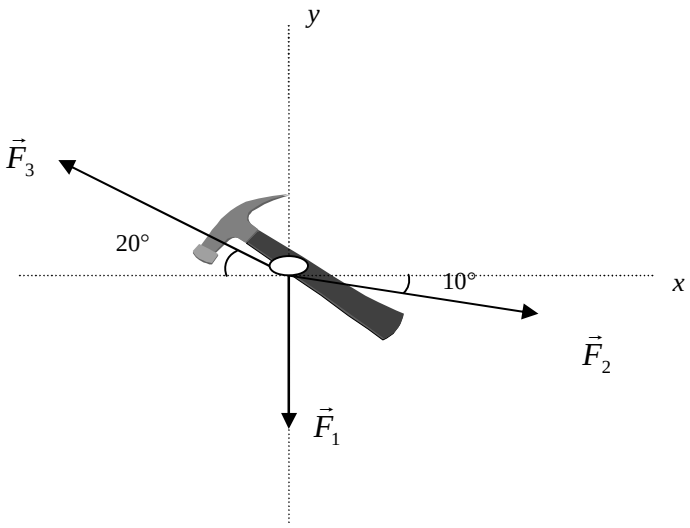

3.13 Calculeu la força total exercida sobre el punt de la figura. $F_1$ = 20 N, $F_2$ = 30 N, $F_3$ = 50 N.



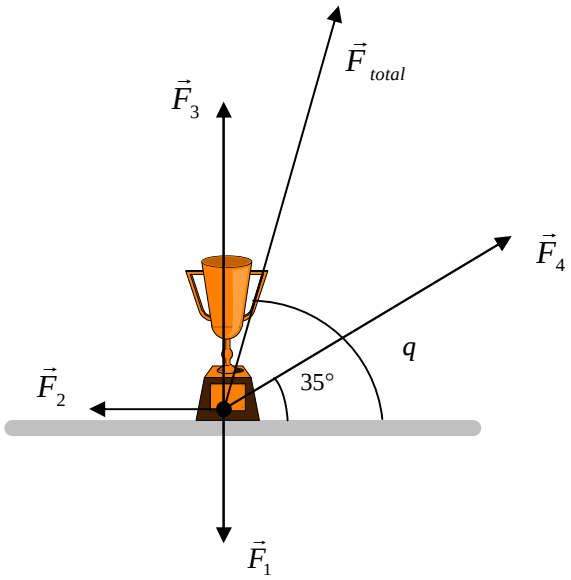
3.14 Calculeu la força total exercida sobre la tortuga de la figura. $F_1$ = 5 N, $F_2$ = 7 N, $F_3$ = 8 N.



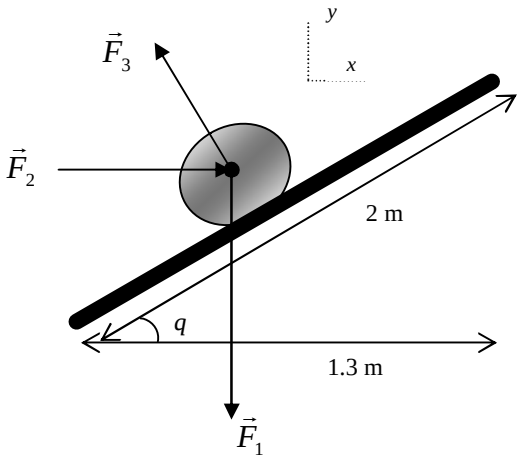

3.15 Calculeu la força total exercida sobre el punt dibuixat en el martell de la figura. $F_1$ = 5 N, $F_2$ = 7 N, $F_3$ = 8 N.



3.16 Sobre el punt de la figura actua una força total de 40 N. Els mòduls de les forces són: $F_2$ =20 N i $F_3$ = 40 N i $F_4$ = 30 N. Calculeu el mòdul de la força $\vec{F}_1$.




3.17 Calculeu la força total exercida sobre el punt dibuixat en la figura.Les dades dels mòduls de les forces són: $F_1$ = 5 N, $F_2$ = 7 N i $F_3$ = 4 N i aquesta és perpendicular a la superfície.




## 3.2 Forcés a distància.

### Conceptes bàsics

En la Natura existeixen fonamentalment dos tipus de forcés:

- d'acció a distància
- de contacte

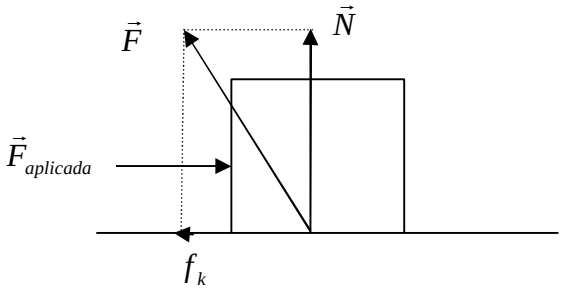
Les forcés de acció a distància són forcés que poden actuar entre cossos que no estan en contacte entre si. Són d'aquest tipus les forcés gravitatòries, magnètiques y elèctriques. Una força particularment important és la força amb que la Terra atreu els cossos, que s'anomena *pes*, $\vec{P} = m\vec{g}$, on $m$ és la massa de l'objecte i $\vec{g}$ és l'acceleració de la gravetat, que val aproximadament 9.8 m $s^{-2}$. Les forces elèctriques és veuran al tema 5.

## 3.3 Forces de contacte.

### Conceptes bàsics

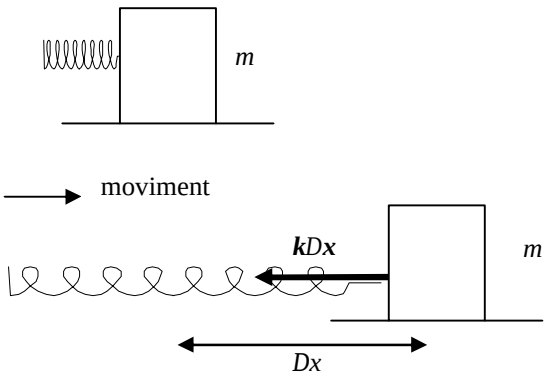
Les forcés que actuen quan dos objectés estan en contacte s'anomenen forcés de contacte, malgrat això, a nivell microscòpic, aquestes forcés són magnètiques y elèctriques. Són exemples de forcés de contacte la força de fricció, la força que exerceix una molla sobre un objecte, les tensions en les cordés i les forces aplicades. Sempre, on hi ha un contacte hi haurà una força.

En l'exemple següent es mostren forces de contacte, que són: $\vec{F}_{apliicada}$, i $\vec{F}$




$\vec{F}_{aplicada}$ és la força externa que s'aplica sobre l'objecte, $\vec{F}$ és la força de contacte entre les dues superfícies, $\vec{N}$ y $\vec{f}_k$ són les components de la força de contacte que són perpendicular a la superfície y paral·lela a la superfície, respectivament. $f_k$ és la força de fregament cinètica y té la forma: $f_k = m_k N$, on $m_k$ és el coeficient de fregament cinètic que té un valor constant en un interval relativament ample de velocitats i només és funció de la natura de les superfícies que estan en contacte. En el tema següent es calcularà l'energia dissipada per aquesta força.

Una altra força de contacte que s'utilitza amb freqüència és la força elàstica que realitza una molla sobre un objecte de massa m. Aquesta força segueix la llei de Hooke: $\vec{F} = k\Delta\vec{x}$, on $D\vec{x}$ és la deformació experimentada per la molla.



## 3.4 Les lleis de Newton. Diagrama del sòlid lliure

### Conceptes bàsics

Malgrat que en la natura existeixen molts tipus de forces, les efectes de qualsevol d'aquestes a nivell macroscòpic es descriuen mitjançant les tres lleis de Newton:

- Primera llei de Newton: "Un objecte continua en estat de repòs o de moviment uniforme rectilini, a menys ser que sobre ell actuïn forces que el facin canviar d'estat".

Sí $\sum \vec{F}_{ext} = 0$, es diu que l'objecte està en equilibri, on $\sum \vec{F}_{ext}$ indica la suma de les forces externes que actuen sobre l'objecte.

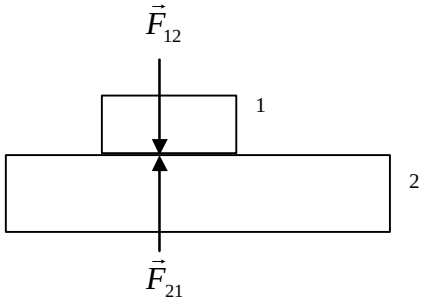
- Segona llei de Newton: "Quan existeix una força neta que actua sobre un objecte, aquest objecte experimenta una acceleració en la mateixa direcció de la força.

És a dir:

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$, on $m$ és la massa de l'objecte i $\vec{a}$ és l'acceleració

Per tant en equilibri ($\sum \vec{F}_{ext} = 0$) no hi ha acceleració de forma que la velocitat és constant. Podem dir que la primera llei de Newton és un cas particular de la segona llei.

- Tercera Llei de Newton: "Per cada acció existeix sempre una reacció igual però de sentit oposat". Les forces sempre actuen per parelles. Les forces d'acció i reacció actuen sobre objectes diferents y tenen el mateix mòdul i direcció però sentits oposats. En el cas següent, $\vec{F}_{12}$ és la força que exerceix l'objecte 1 sobre el 2 y $\vec{F}_{21}$ és la força que exerceix l'objecte 2 sobre l'1. Totes dues són forcés d'acció i reacció.




Avui sabem que la tercera llei de Newton és valida per a forces gravitatòries i elèctriques (incloent les forces de contacte), però no per a forces magnètiques.

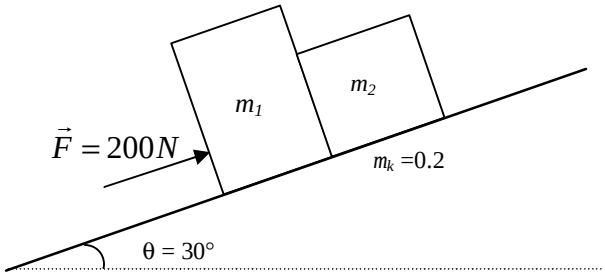
Diagrama del sòlid lliure:

El mètode general para resoldre problemes mitjançant les lleis de Newton consisteix en els següents passos:

- Aïllar l'objecte y dibuixar les forces reals que actuen sobre ell. Si hi ha més d'un objecte, caldrà dibuixar un diagrama de forces per cadascun.
- Escollir un sistema de coordenades per cada objecte i aplicar la segona llei de Newton en forma de components.
- Resoldre el sistema d'equacions.

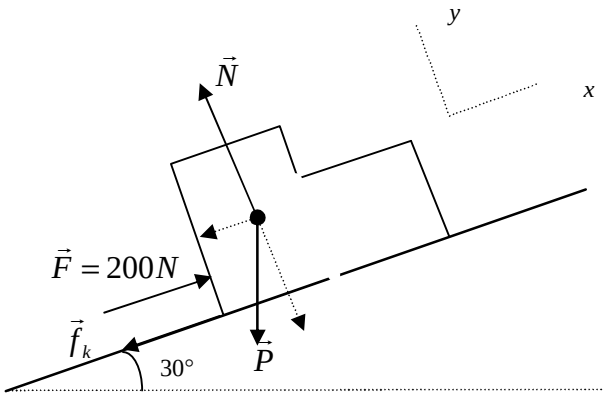
**Exemple 3.2**

A partir de l'esquema de la figura, a) dibuixeu el diagrama del cos lliure del sistema format per les dues caixes de masses, $m_1$ = 5 kg i $m_2$ = 10 kg; b) calculeu l'acceleració de les caixes; i c) calculeu la força de fregament que actua en cadascuna. d) calculeu la força de contacte entre les dues caixes.




**Resolució**

a)




on:

$$\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{g} = M\vec{g}$$

b) Apliquem la segona llei de Newton en les direccions *x* i *y*:

direcció *x*:

$$F - f_k - Mgsin30^\circ = Ma\,,$$
$$M = m_1 + m_2$$
$$f_k = m_k N$$

direcció *y*:

$$N = Mg\,cos\,30^\circ$$
$$f_k = m_k Mg\cos 30^\circ$$
$$F - m_k Mg\cos 30^o - Mg\sin 30^o = Ma$$

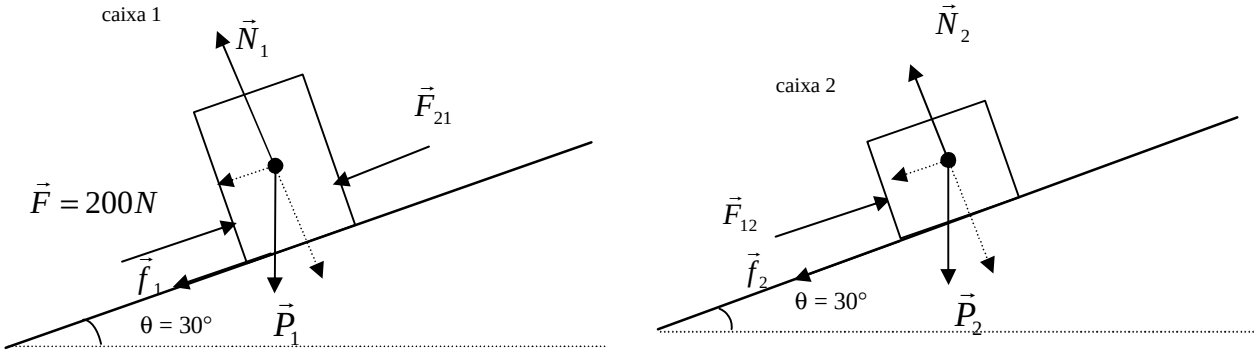
Substituint els valors numèrics i aïllant l'acceleració: $a$ = 6.7 m/s$^2$

c)

$$f_1 = m_k N_1 = m_k m_1 g \cos 30^\circ = 8.5\,\text{N}$$

$$f_2 = m_k N_2 = m_k m_2 g \cos 30^\circ = 17\,\text{N}$$

d) Dibuixem els diagrama del sòlid lliure de cadascuna de les caixes:




$f_1$ i $f_2$ són les forces de fricció cinètica.

Per la tercera llei de Newton:

$$F_{12} = F_{21}, \text{ en forma vectorial: } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

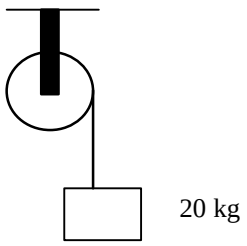
Apliquem la segona llei de Newton a la caixa *2*:

$$F_{12} - P_2 \operatorname{sen} 30 - f_2 = m_2 a$$
$$F_{12} = 67 + 49 + 17 = 133\ N$$

**Problemes**

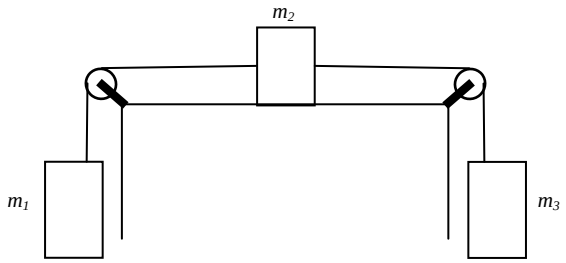
3.18 Sobre un cos en repòs de massa $m_1$ actua una força de 100 N en direcció horitzontal. Sobre un altre cos de massa $m_2$ actua la mateixa força i l'acceleració produïda és doble que l'acceleració del primer cos. a) Calculeu la relació entre les dues masses. b) Si la massa $m_1$ = 10 kg, calculeu l'acceleració dels dos cossos.

3.19 Un objecte de 20 kg està sotmès a una tensió de 10 N . Calculeu la seva acceleració.



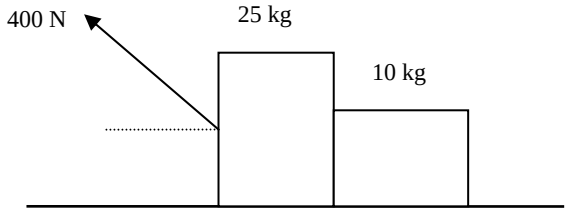
3.20 Un home arrossega un objecte de massa 5 kg situat sobre un pla horitzontal mitjançant una força de 5 N que forma un angle de 30° amb l'horitzontal. a) Dibuixeu el diagrama del sòlid lliure de l'objecte. b) Calculeu la força que fa el pla sobre l'objecte. c) Calculeu la seva velocitat quan ha recorregut 10 m. d) Calculeu el temps que ha trigat a assolir-la. Negligiu la fricció.

3.21 En el diagrama de la figura, el sistema està inicialment en repòs. Les cordés i les politges tenen massa negligible. La massa $m_1 = m_2 = 5$ kg i la $m_3 = 7.5$ kg. Calculeu: a) L'acceleració de les masses. b) Les tensions de les cordes. c) L'altura que les separa quan ha transcorregut un temps de 2 s.



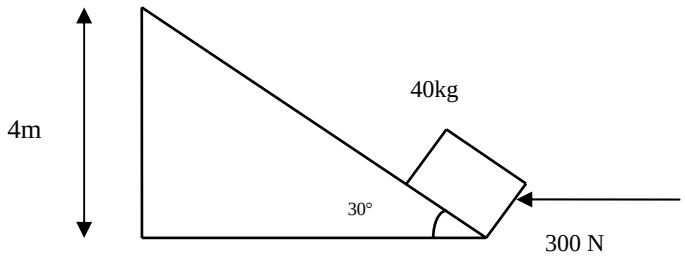

3.22 Repetiu el problema anterior tenint en compte que el coeficient de fricció cinètic entre la superfície i el bloc de massa $m_2$ és 0.2

3.23 Dos blocs de massa 10 kg i 25 kg, enganxats entre ells, inicialment en repòs i recolzats sobre una superfície horitzontal llisa són arrosegats per una força que forma un angle de 45° amb l'horitzontal. a) Calculeu l'acceleració dels dos blocs així com la velocitat i l'espai recorregut quan ha passat un temps de 2 s. b) Calculeu la força entre els dos blocs.

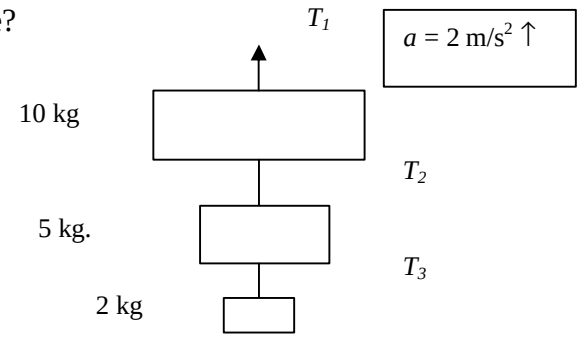



3.24 Un cos es deixa anar des de dalt d'una rampa de 40° d'inclinació. a) Calculeu la velocitat que té a l'instant en què ja ha recorregut els dos primers metres. Considereu negligible la fricció. b) Repetiu el problema tenint en compte que el coeficient de fregament cinètic entre la rampa i el cos és 0.2

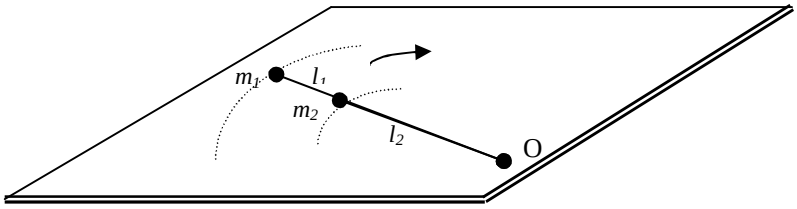
3.25 Un objecte de massa 40 kg puja un pla inclinat que forma un angle de 30° respecte a l'horitzontal sota l'efecte d'una força horitzontal constant de 300 N (vegeu figura). Si inicialment l'objecte està aturat, determineu, aplicant les lleis de Newton, la velocitat de l'objecte quan ha pujat 4 m. Suposeu que el fregament és negligible.



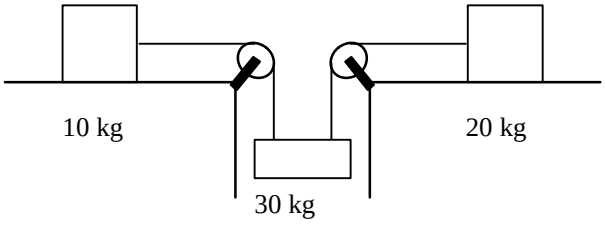
3.26 Quant valen les tensions a cada cable?



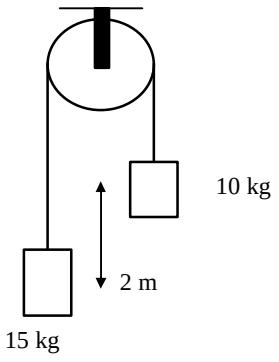

3.27 Un bloc de massa $m_1$ = 3 kg, que està lligat a l'extrem d'una corda de longitud $l_1$ = 50 cm, fa un moviment circular a 20 r.p.m. sobre una taula sense fregament. L'altre extrem de la corda està fixat a la taula. Calculeu: a) la tensió de la corda. b) Si mitjançant un fil de longitud $l_2$ = 20 cm afegim una massa $m_2$ = 2 kg i fem girar el conjunt a 40 r.p.m., quan valdran ara les tensions del fils?



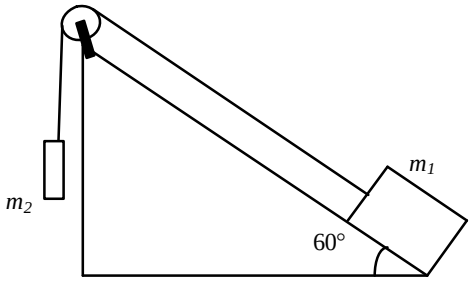

3.28 Calculeu les tensions de les cordes així com l'acceleració del sistema de la figura suposant un coeficient de fricció cinètic de 0.2



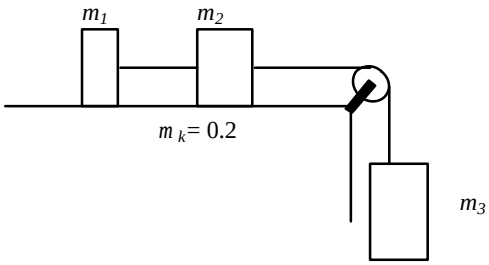

3.29 En una màquina de Atwood, els dos cossos estan inicialment separats una altura de 2 m (vegeu figura) i les seves masses son $m_1$ = 10 kg i $m_2$ = 15 kg. Quina massa hauria d'afegir-se a un d'ells perquè l'altura entre ells sigui de 5 m en 2 s?



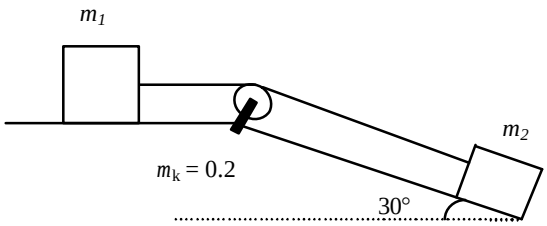
3.30 En el sistema de la figura, les masses valen $m_1$ = 10 kg i $m_2$ = 4 kg i estan inicialment en repòs. El coeficient de fricció cinètic entre $m_1$ i el pla és 0.3. Calculeu: a) L'acceleració de les masses. b) La tensió dels cables. c) El temps que triguen en recórrer 2 m.



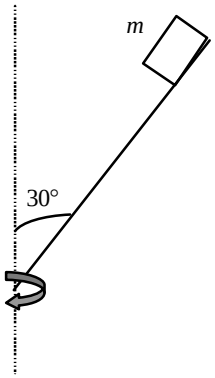

3.31 Tres masses, $m_1$ = 2 kg, $m_2$ = 4 kg i $m_3$ = 10 kg, estan unides tal com s'indica a la figura mitjançant un fil inextensible de massa negligible. El coeficient de fricció cinètic val 0.2 a) Dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun dels blocs. b) Calculeu les tensions. c) Calculeu la velocitat de cada massa quan $m_3$ hagi baixat 15 m.



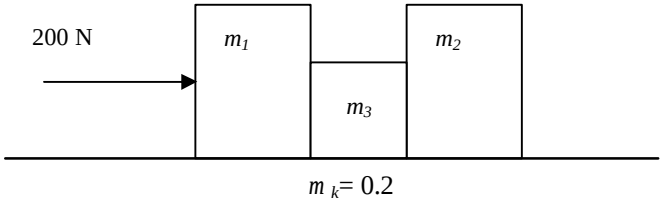

3.32 El sistema de la figura és mou inicialment amb una velocitat de 4 m/s. Les masses són $m_1$ = 6 kg i $m_2$ = 14 kg. El coeficient de fricció cinètic val 0.2. La massa de la politja és negligible. a) Dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun dels blocs. b) Calculeu la tensió de la corda. c) Calculeu la velocitat de cada bloc després de 3 segons.



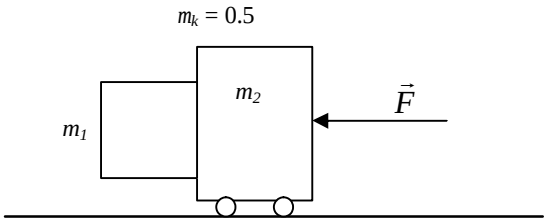

3.33 Un regle inclinat 30° de longitud 1 m gira al voltant d'un eix vertical. Un cos de massa $m$ es manté en equilibri sobre l'extrem. Si el coeficient de fricció és menyspreable, trobeu la velocitat angular a què ha de girar la superfície perquè no caigui el cos.



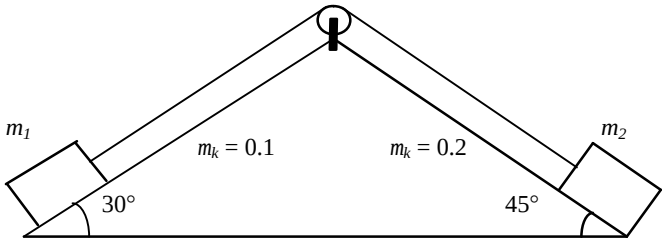
3.34 Dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun dels blocs de masses $m_1$ = 20 kg, $m_2$ = 5 kg i $m_3$ = 40 kg. Calculeu l'acceleració del sistema i les forcés de contacte entre els blocs. El coeficient de fricció cinètic val 0.2.



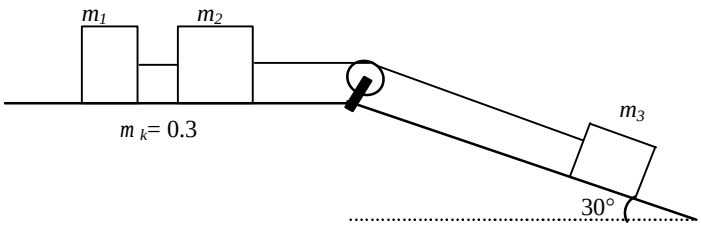

3.35 Entre el bloc de massa $m_1$ = 5 kg i el de massa $m_2$ = 10 kg existeix un coeficient de fricció cinètic $m_k$ = 0.5. Dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun dels blocs de la figura. Calculeu: a) la força mínima $F$ que hauria d'aplicar-se sobre la massa $m_2$ perquè el bloc de massa $m_1$ no llisqués i b) el mòdul de la força de contacte entre els dos blocs.




3.36 Dues masses $m_1$ = 10 kg i $m_2$ = 22 kg estan lligades als extrems d'una corda com s'indica a la figura. Si els coeficients de fricció cinètics són, 0.1 i 0.2, dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun del blocs. Calculeu l'acceleració del conjunt i la tensió de la corda quan es deixa el sistema en llibertat.




3.37 Tenim tres masses $m_1$ =1 kg, $m_2$ = 2 kg i $m_3$ = 8 kg, unides tal com s'indica a la figura mitjançant una corda inextensible de massa negligible. a) Cap a on es mou el sistema? b) Dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun dels blocs tenint en compte que existeix fricció per a la superfície horitzontal i no per al pla inclinat. Calculeu: c) l'acceleració del sistema, d) la velocitat de cada bloc quan la massa $m_3$ hagi baixat una altura de 8 m respecte a la posició inicial de repòs.



**Solucions**

3.1 $F_y = -10.6$ N, $F_x = -17$ N

3.2 $F_\perp = -13$ N, $F_{//} = -35.71$ N

3.3 $\vec{F} = \left(-30.64\vec{i} - 15.71\vec{j}\right)$N

3.4 $\vec{F} = \left(-11.74\vec{i} + 10\vec{j}\right)$N

3.5 $\vec{F} = \left(-33\vec{i} - 11.7\vec{j}\right)$N

3.6 $\vec{F}_1 = \left(102\vec{i} + 70.7\vec{j}\right)$N

3.7 $\vec{F} = \left(152\vec{i} + 468.6\vec{j}\right)$N

3.8 $\vec{F} = \left(187.2\vec{i} + 195.7\vec{j}\right)$N

3.9 0

3.10 $\vec{F} = \left(-45.7\vec{i}\right)$N

3.11 $\vec{F} = \left(14.6\vec{i}\right)$N

3.12 $\vec{F} = \left(34.7\vec{i} + 56.1\vec{j}\right)$N

3.13 7 N cap a la dreta i paral·lela a la superfície

3.14 $\vec{F} = \left(0.43\vec{i} + 4.66\vec{j}\right)$N

3.15 $\vec{F} = \left(-0.62\vec{i} - 6.52\vec{j}\right)$N

3.16 17.46 N

3.17 $\vec{F} = \left(3.96\vec{i} - 2.4\vec{j}\right)$N

3.18 a) $m_1 = 2m_2$, b) $a_1 = 10$ m/s$^2$ , $a_2 = 20$ m/s$^2$

3.19 9.3 m/s$^2$

3.20 b) 46.5 N, c) 4.16 m/s, d) 4.78 s

3.21 a) 1.4 m/s$^2$ , b) 56 N, 63 N, c) 5,6 m

3.22 a) 0.84 m/s$^2$, b) 53.2 N, 67.2 N, c) 3.36 m

3.23 a) 8.08 m/s$^2$, 16.16 m/s, 16.12 m, b) 80.8 N

3.24 a) 5.02 m/s, b) 4.38 m/s

3.25 5.05 m/s

3.26 200.6 N, 82.6 N, 23.6 N

3.27 a) 6.55 N, b) 26.32 N, 7.02 N

3.28 3.92 m/s$^2$, 58.8 N, 117.6 N

3.29 treure 3.34 kg a la massa de 10 kg

3.30 2.21 m/s$^2$, b) 48.04 N, c) 1.34 s

3.31 b) 14.7 N, 44.1 N, c) 12.72 m/s

3.32 b) $T$=21.67 N, $a$=1.65 m/s$^2$, c) $v$=8.9 m/s

3.33 5.8 rad/s

3.34 1.12 m/s$^2$, 138.4 N, 15.4 N

3.35 Sol: a) 294 N, b) $F_{12} = F_{21} = 109.6\,\text{N}$

3.36 2.0 m/s$^2$, 77.5 N

3.37 a) Cap a la dreta, c) 2.76 m/s$^2$, d) 9.4 m/s