TEMA 5 ELECTRICITAT

Objectius

Adquirir pràctica en el càlcul de les forces d'interacció elèctrica entre càrregues puntuals, i en el de l'energia associada a aquestes forces. Ser conscient de l'aventatge que comporta fer servir el camp i el potencial elèctric. Nocions elementals sobre conductors i dielèctrics.

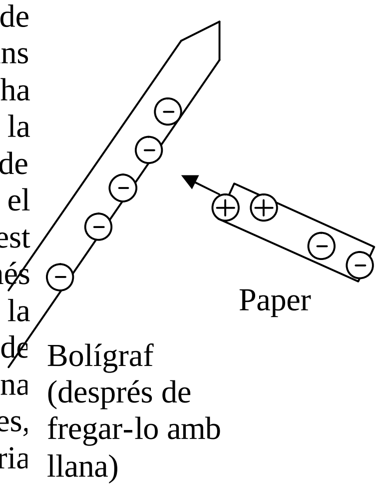
Índex

5.1 Forces elèctriques

Conceptes bàsics

A diferència de les forces gravitatòries, que fan caure les pomes dels arbres i orbitar la Lluna envoltant de la Terra, les forces elèctriques són més sobtils d'observar a la Natura. Anem a veure, però, un exemple quotidià i senzill en què s'observen forces elèctriques.

Si fregueu un bolígraf de plàstic amb un jersey de llana, veureu que el bolígraf atreu trocets de paper. Aquesta mena de força no pot ser gravitatòria, perquè si pesem el bolígraf abans i després de fregar-lo amb la llana, veurem que la massa no ha variat en suficient mesura. Avui se sap que l'explicació és la següent: quan freguem el bolígraf, aquest arrenca electrons de la llana i per tant queda carregat negativament. En acostar el bolígraf a un trocet de full, les càrregues negatives d'aquest s'allunyen (per repulsió del bolígraf) i la zona del paper més propera al bolígraf queda carregada positivament (vegeu la figura). Per això, un bolígraf fregat amb llana atreu trocets de paper (les càrregues negatives atrauen les positives, amb una força superior a aquella amb què repel·leixen les negatives, més allunyades). Sense estudiar les forces elèctriques seria impossible explicar aquesta mena de fenòmens.



<u>Primera forma de calcular forces:</u>

L'expressió següent per a la força d'interacció elèctrica entre dues càrregues puntuals A i B està d'acord amb els resultats experimentals, i s'anomena llei de Coulomb:

$$\vec{F}_{AB} = k\,\frac{q_A\, q_B}{r_{AB}^2}\,\hat{u}_{AB}\,,$$

on $\vec{F}_{AB}$ és la força elèctrica ***que fa q_A sobre q_B*** *(no pas q_B sobre q_A)*, i està en la direcció que uneix q_A i q_B :

$$\hat{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|}$$

és el vector unitari ***des del lloc on hi ha la càrrega puntual*** q_A ***fins al punt on hi ha*** q_B *(no pas des de* q_B *fins a* q_A*).*

La unitat de q_A i q_B en el sistema internacional d'unitats és el Coulomb (es simbolitza amb la lletra C).

La constant k s'anomena constant de Coulomb (com a exercici, demostreu quines unitats ha de tenir en sistema internacional). El seu valor és

$$k = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2} = \frac{1}{4pe_0} \, ,$$

on e_0 (permitivitat elèctrica del buit) val $1/(4p \cdot 9 \cdot 10^9) = 8.85 \cdot 10^{-12} \quad \mathrm{C}^2/(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2)$.

Segona forma de calcular forces:

Una segona forma, menys elegant però que sol evitar confusions amb els signes, i que també permet trobar la força entre dues càrregues Q i q és escriure simplement:

$$\vec{F} = k \, \frac{|Q| \, |q|}{r^2} \, \hat{u} \, ,$$

on r és la distància que separa les càrregues i

$$\hat{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

és un vector unitari en la direcció que uneix les dues càrregues, i triar el sentit de $\vec{F}$ (i de $\hat{u}$) tenint en compte que, per definició, dues càrregues del mateix signe es repel·leixen mentre que dues càrregues de signes oposats s'atreuen.

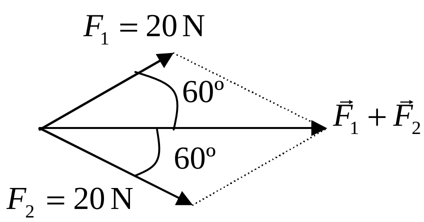
Incís

Recordem que és molt important tenir clar que la força és un vector, no un número. Per tant:

· ***Sempre que es demani una força, el resultat ha de ser un vector, mai un número***. A continuació veurem alguns exemples.

· *Si hi ha més d'una força, la força total és la suma de vectors, no la suma de mòduls.* Això ho recordem del tema de vectors: a tall d'il·lustració, a l'exemple 1.5 tenim $\vec{A} = (2,3)$, $\vec{B} = (3,6)$, i el mòdul de la suma dels vectors és $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(2+3)^2 + (3+6)^2} = 10.296$, però això és diferent de la suma de mòduls: $|\vec{A}| + |\vec{B}| = \sqrt{2^2 + 3^2} + \sqrt{3^2 + 6^2} = 10.314$.

· *La suma de mòduls no te significat físic.* Un exemple on això es veu molt clar és el de la figura adjunta.



En aquest cas el mòdul de la força total (suma de forces) és:

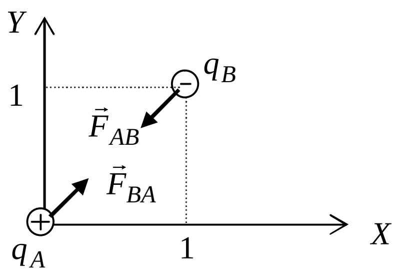
$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = 20\cos 60º + 20\cos 60º = 10 + 10 = 20\,\mathrm{N}$

Però això és diferent de la suma de mòduls, que val:

$|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| = 20 + 20 = 40\,\mathrm{N} \neq 20\,\mathrm{N}$.

Serien iguals només si els vectors estiguessin en línia (és a dir, si tinguessin la mateixa direcció i sentit).

Així doncs, ***la suma de mòduls no te cap interés ni utilitat. No s'ha de calcular mai. El que sí interessa és el mòdul de la suma de vectors.***



Com a exemple de la llei de Coulomb, suposem que volem determinar les forces elèctriques entre

$q_A = 2$ C i $q_B = -3$ C, situades respectivament a (0,0) i (1 m,1 m) (vegeu la figura).

<u>Primera forma:</u>

Una primera forma és aplicar la llei de Coulomb escrivint la força de q_A sobre q_B com

$$\vec{F}_{AB} = k\frac{q_A q_B}{r_{AB}^2}\hat{u}_{AB} = k\frac{q_A q_B}{r_{AB}^2}\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = k\frac{q_A q_B}{r_{AB}^3}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot(-3)}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^3}(1-0,\ 1-0) =$$

$$\frac{-54\cdot 10^9}{2^{3/2}}(1{,}1)\text{ N.}$$

En canvi, la força de q_B sobre q_A és

$$\vec{F}_{BA} = k\frac{q_B q_A}{r_{BA}^2}\hat{u}_{BA} = k\frac{q_B q_A}{r_{BA}^2}\frac{\vec{r}_{BA}}{r_{BA}} = k\frac{q_B q_A}{r_{BA}^3}(\vec{r}_A - \vec{r}_B) = 9\cdot 10^9\,\frac{(-3)\cdot 2}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^3}(0-1,\ 0-1) =$$

$$\frac{54\cdot 10^9}{2^{3/2}}(1{,}1)\text{ N.}$$

Ens adonem que es cumpleix la tercera llei de Newton (llei d'acció-reacció): $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

<u>Segona forma:</u>

Tal i com hem indicat, una segona forma (que potser trobeu més senzilla, però menys generalista) és escriure simplement

$$\vec{F} = k\frac{|q_A||q_B|}{r^2}\hat{u} = k\frac{|q_A||q_B|}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{|q_A||q_B|}{r^3}\vec{r} = \frac{54\cdot 10^9}{2^{3/2}}(1{,}1).$$

Aquesta és la força sobre q_A, perquè te les dues components positives (això ho sabem gràcies a la figura anterior, en la què hem aplicat que dues càrregues de signe oposat s'atreuen). Per la llei d'acció-reacció, la força sobre q_B és:

$$-\vec{F} = \frac{-54\cdot 10^9}{2^{3/2}}(1{,}1),$$

de forma que obtenim els mateixos resultats que de la primera forma.

Principi de superposició

L'anomenat principi de superposició diu que la força total sobre una càrrega q és igual a la suma de les forces degudes a les altres càrregues Q_i:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = k\frac{Q_i\, q}{r_i^2}\hat{u}_i\ ,$$

on

$$\hat{u}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \frac{\vec{r}_q - \vec{r}_{Qi}}{|\vec{r}_q - \vec{r}_{Qi}|},$$

i comprovarem sempre que el signe de les seves components sigui coherent amb el fet que dues càrregues d'igual (diferent) signe es repel·leixen (atreuen). Per aquest motiu cal fer sempre un dibuix, abans d'escriure cap equació.

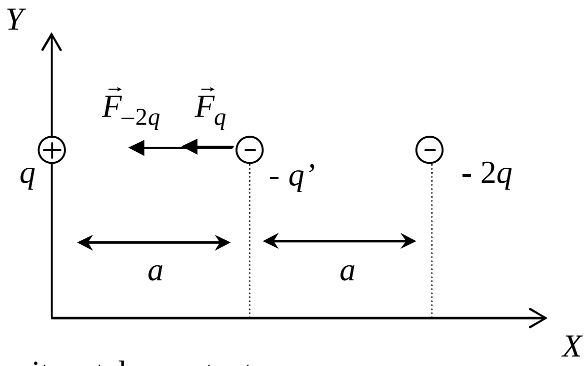
Convé tenir clar que el principi de superposició és vàlid en general, no només per a forces elèctriques. Per exemple, la força total sobre un bloc és igual a la suma de forces (pes, fregament…), vegeu l'exemple de la secció 3.5 d'aquest llibre.

Exemple 5.1

Tres càrregues es troben situades sobre un pla, en el qual considerem coordenades cartesianes (x, y). La primera càrrega, $q > 0$, és al punt (0,*a*); la segona és $-2q < 0$ i es troba al punt (2*a*,*a*); i la tercera, $-q' < 0$, al (*a*,*a*). ¿Quina força fan les dues primeres càrregues sobre la tercera? Trobeu-ne les components i el mòdul.

Resolució

Al dibuix adjunt representem les forces que fan la primera i segona càrregues sobre la tercera, que és situada al mig. Per dibuixar les forces, tenim en compte que dues càrregues del mateix signe (p. ex. negatives) es repel·leixen, mentre que dues càrregues de signe oposat s'atreuen.



Veiem que les dues forces són horitzontals, per tant

$$F_y = 0 .$$

D'altra banda, la component horitzontal de la força és

$$F_x = -k\frac{qq'}{a^2} - k\frac{(2q)q'}{a^2} ,$$

és a dir

$$F_x = -3k\frac{qq'}{a^2} .$$

Ens adonem que el resultat és negatiu, tal i com ha de ser en vista de la figura. Insistim que, per aquest motiu, és molt útil dibuixar un esquema de les forces, abans de fer cap càlcul per resoldre un problema quasevol d'electrostàtica.

El mòdul de la força és

$$F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} ,$$

en el nostre cas:

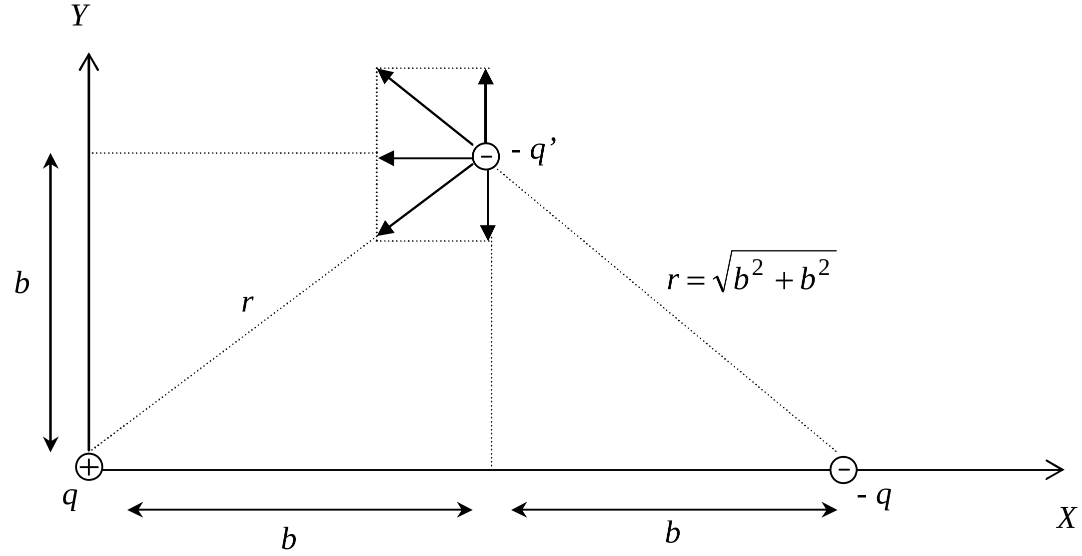
$$F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{\left(-3k\frac{qq'}{a^2}\right)^2 + 0^2} = 3k\frac{qq'}{a^2}$$

Exemple 5.2

Una càrrega $q > 0$ és al punt (0,0), i una altra $-q < 0$ a (2*b*,0). Si al punt (*b*,*b*) n'hi ha una tercera, de valor $-q' < 0$, ¿Quina força actua sobre aquesta?.

Resolució

Tal i com hem indicat, el primer pas en la ressolució és fer sempre un dibuix. Al mateix representarem les forces sobre la càrrega que interessa:



Donada la simetria, les components verticals de les dues forces s'anul·len:

$$F_y = 0 .$$

D'altra banda, la component horitzontal de la força és:

$$F_x = -k \frac{qq'}{b^2 + b^2} \cos 45^{\mathrm{o}} - k \frac{qq'}{b^2 + b^2} \cos 45^{\mathrm{o}} ,$$

és a dir

$$F_x = -2k \frac{qq'}{2b^2} \cos 45^{\mathrm{o}} = -k \frac{qq'}{b^2} \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

i és negativa, tal i com esperàvem gràcies a la figura anterior.

Problemes

5.1 Si al punt (0,0) hi ha una càrrega q, al punt (a, – a) una altra de valor q, i al punt ($2a$,0) una tercera que té valor – q, quins són els components i el mòdul de la força total sobre una quarta càrrega – q' situada a (a,a)?

5.2 Donades dues càrregues, una de – 1 μC situada a l'origen de coordenades, i una altra de 0.1 μC al punt (3, 0), quines components te la força total sobre una tercera càrrega de 3 μC situada a (3, 1)? Les coordenades anteriors venen expressades en cm.

5.3 A cada vèrtex d'un triangle equilàter de costat a, hi ha una càrrega $q > 0$. Trobeu la força que fa cadascuna de les tres càrregues sobre una quarta càrrega $Q > 0$ situada al punt mig del costat inferior (suposeu-lo horitzontal). Un cop trobades, determineu la força total sobre Q.

5.4 Considereu un hexàgon, amb costats de longitud $l = 10$ cm i el costat inferior horitzontal. Si a cada vèrtex del costat inferior hi ha una càrrega de -2 mC, i a cadascun de la resta de vèrtexs n'hi ha una de 3 mC, quina força hi ha sobre una setena càrrega de 1 mC situada al centre?

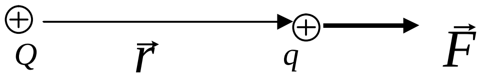
5.2 Camp elèctric

Conceptes bàsics

Recordem de l'apartat 5.1 que la força creada per una càrrega Q sobre una altra q, situada a un punt de vector posició $\vec{r}$ relatiu a Q, es pot escriure com:

$$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\hat{u} ,$$

on



$$\hat{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

és el vector unitari en la direcció i sentit des de Q fins al punt de vector posició $\vec{r}$ relativa a Q.

Definim el ***camp elèctric*** creat per Q en un punt de vector posició $\vec{r}$ com ***la força que faria Q sobre una càrrega de 1 Coulomb situada en aquell punt.*** És a dir, posant $q = 1C$ a la fòrmula anterior, obtenim el camp elèctric enlloc de la força:

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{u} ,$$

Comparant les fòrmules de la força i del camp, veiem que la força sobre q deguda a Q es pot escriure com:

$$\vec{F} = q\vec{E} ,$$

per tant, en el sistema internacional les unitats de camp elèctric són Newton/Coulomb (N/C).

¿Per què fer servir el camp elèctric si és simplement un cas particular de la força? Perquè el camp, com el voltatge (apartat 5.3), permet comparar millor sistemes diferents.

A l'apartat 5.1 hem enunciat el principi de superposició de forces, és a dir:

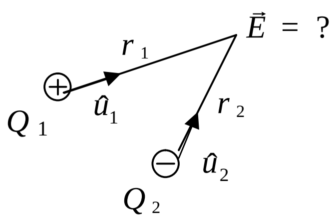
$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = k\frac{Q_i\, q}{r_i^2}\hat{u}_i ,$$

on

$$\hat{u}_i = \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} = \frac{\vec{r}_q - \vec{r}_{Qi}}{|\vec{r}_q - \vec{r}_{Qi}|} ,$$

de forma que (en dividir per q) veiem que aquest principi és vàlid també per al camp elèctric, que podem calcular al punt $\vec{r}$ així:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = \sum\ k\frac{Q_i}{r_i^2}\hat{u}_i = k\frac{Q_1}{r_1^2}\hat{u}_1 + k\frac{Q_2}{r_2^2}\hat{u}_2 + \ldots$$

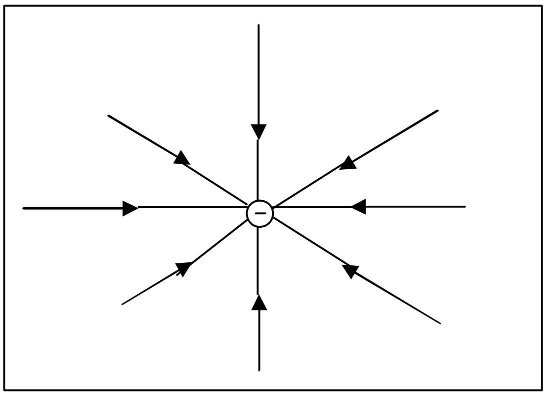


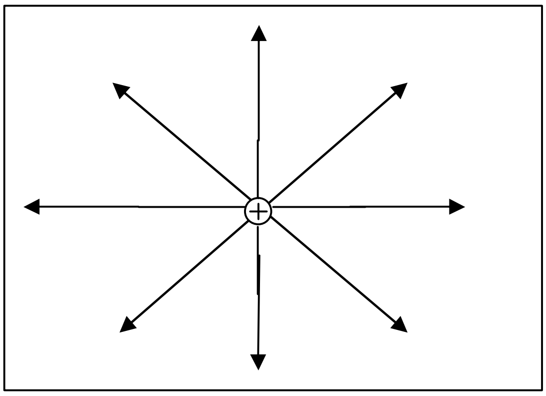
En aquesta equació, quan substituïm valors numèrics, cal posar no només els valors absoluts, sinó també ***els signes*** de Q_1, Q_2, etc.

Cal insistir en què el camp elèctric és un vector, com ho és la força: per tant, si es demana el camp elèctric la resposta ha de ser un vector, no un número. Tanmateix, ***si hi ha***

varis camps el total és la suma de vectors, no la suma de mòduls (vegeu l'incís corresponent a l'apartat 5.1, i també el tema 1).

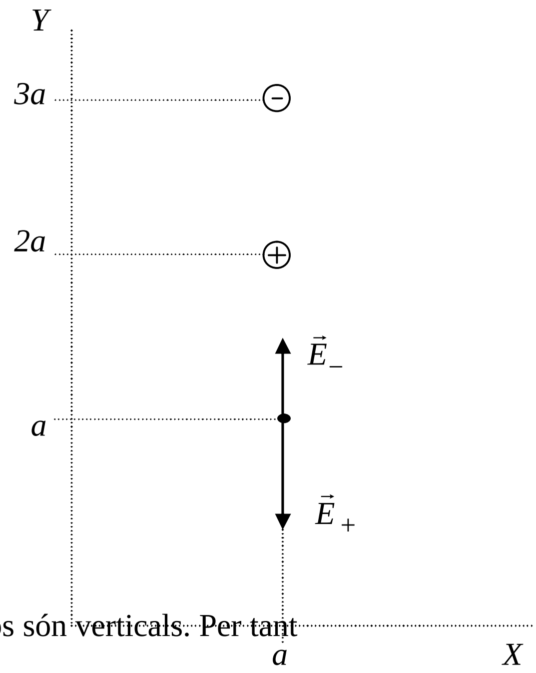
Per definició, les ***línies de camp*** són línies tangents, a qualsevol dels seus punts, al vector camp elèctric. Per exemple, els dibuixos següents il·lustren les línies de camp degudes, respectivament, a una càrrega puntual negativa i positiva (la direcció i els sentits de les fletxes han estat determinats tot recordant que el vector camp elèctric és la força sobre una càrrega de +1 C).





Les línies de camp són fàcils d’observar fent servir llimadures de ferro, especialment si les submergim en un líquid de baix fregament (és a dir, viscositat). Les llimadures d’orienten en el sentit del camp, pel mateix motiu que els trocets de paper considerats a la secció 5.1. Les límies de camp permeten saber la direcció i sentit del camp i, per tant, cap on tendeix a moure’s una càrrega ($\vec{F} = q\vec{E}$). També donen idea del mòdul del camp: per exemple, a les figures anteriors veiem que a les regions on les línies de camp són més properes entre sí (és a dir, a prop de les càregues) el camp és més intens (a menor distància, major camp creat per una càrrega, i $E = kq/r^2 \to \infty$ quan $r \to 0$).

Exemple 5.3



Dues càrregues – q i q, es troben (a,3a) i (a,2a), respectivament. Quin és el camp a (a,a)?

Resolució

Al dibuix adjunt indiquem el camp creat per cada càrrega, i l'hem fet de la forma següent: el camp elèctric és la força sobre una càrrega de $+1$ C. Per tant, donat que la càrrega negativa n'atrauria una de $+1$ C, el camp que crea $-q$ va cap amunt. En canvi, donat que la càrrega positiva es repeliria amb una de $+1$ C, el camp que fa va cap avall. Aquest camp serà més gran, perquè la càrrega positiva és més propera que la negativa i tenen el mateix valor absolut.

Del dibuix obtingut es dedueix que els camps són verticals. Per tant

$$E_x = 0 + 0 = 0\,.$$

D'altra banda,

$$E_y = E_- - E_+ = \frac{kq}{(2a)^2} - \frac{kq}{a^2} = \frac{kq}{a^2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{3kq}{4a^2}\,.$$

Aquest resultat és negatiu, tal i com havíem d'esperar en vista de la figura.

Així doncs, el resultat final per al camp elèctric és:

$$\vec{E} = \left(0, -\frac{3kq}{4a^2}\right).$$

Exemple 5.4

Donades les càrregues de l'exemple 5.3, quina força farien sobre una càrrega de – 4 C situada al punt (a,a)?

Resolució

Donat que ja sabem el camp, no cal pas trobar cada força i sumar-les. És més ràpid seguir el procediment següent:

$$\vec{F} = q\vec{E} = (-4)\left(0,\ -\frac{3kq}{4a^2}\right) = \left(0, \frac{3kq}{a^2}\right).$$

Problemes

5.5 Dos objectes, ambdós de càrrega negativa $-q$, són suficientment petits com per poder ser considerats puntuals i es troben a (0,0) i (0,2a). Determineu el camp elèctric al punt (a,a).

5.6 Repetiu el problema anterior si la càrrega a (0,0) és $+2q$ en lloc de $-q$.

5.7 A cada vèrtex d'un triangle equilàter de costat *a*, hi ha una càrega $q > 0$. Trobeu el camp elèctric al centre del triangle (agafeu el costat inferior paral·lel a l'eix *X*).

5.8 Per a la mateixa distribució de càrregues que al problema anterior, trobeu el camp elècric al punt mig del costat inferior del triangle (suposeu-lo horitzontal).

5.9 Per a la mateixa distribució de càrregues que al problema anterior, trobeu la força elèctrica sobre una càrrega $Q > 0$ situada al punt on hem trobat el camp al probl. 5.8, aplicant el resultat obtingut allà (adoneu-vos que ha de donar el mateix resultat que el probl. 5.3, però ara fem servir el concepte de camp elèctric). Quant valdria la força per a una càrrega *3Q* en lloc de *Q*?

5.10 Trobeu les components del camp elèctric a (1,1) si hi ha una càrrega puntual de 2 μC a (0,0) i una altra de -3μC a (2,0). Les coordenades estan en metres.

5.11 Determineu quins són el mòdul i l'angle amb l'eix *X* (en graus i minuts) del camp trobat al problema 5.10. Quant val aquest angle en radians?

5.12 Tenim una càrrega positiva de 1 nC al punt (0,5m), i una altra negativa de -2 nC al punt (-1m,0). Trobeu el camp elèctric a l'origen, és a dir al punt (0,0). Recordeu que nC significa nanocoulombs, i que podeu consultar el factor de conversió corresponent a la taula de l'apartat 1.2.

5.3 Energia potencial i potencial elèctric

Conceptes bàsics

L'energia potencial elèctrica U es defineix de forma que la seva variació entre dos estats (o posicions durant el moviment d'una càrrega) inicial *i* i final *f* ve donada per:

$$-\left(U_f - U_i\right) = W_i^f = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f q\vec{E} \cdot d\vec{r} \, ,$$

on *W* és el treball (ja introduït al tema 4). Així doncs, les unitats d'energia potencial són les mateixes que les del treball, i al sistema internacional són els joules: 1 Joule = 1 Newton · metre (símbols: J=N·m).

El ***potencial*** elèctric o ***voltatge*** es defineix com l'energia potencial elèctrica per unitat de càrrega:

$$V = \frac{U}{q} \, .$$

En combinar aquesta equació amb l'anterior, obtenim immediatament:

$$-\left(V_f - V_i\right) = \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{r} \, .$$

Les unitats de potencial en sistema internacional és el volts. Així doncs: 1 Volt = 1 Joule/Coulomb (símbols: V=J/C).

Per a un sistema de càrregues puntuals l'origen de potencial elèctric es tria a una distància infinitament allunyada del sistema:

$$V(r \to \infty) = 0\,, \qquad U(r \to \infty) = 0\,.$$

Es pot demostrar que la força elèctrica és conservativa, per això te sentit definir l'energia potencial (vegeu l'apartat 4.5). Per a una càrrega puntual q sotmesa a la força elèctrica d'una altra càrrega puntual Q, triem una trajectòria amb $d\vec{r}$ paral·lel a $\vec{E}$, com a estat inicial aquell on volem determinar U i com a estat final $r \to \infty$. Així obtenim:

$$U = -(0-U) = -(U_{\infty} - U) = \int_r^{\infty} q\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} qE\,dr = \int_r^{\infty} \frac{kqQ}{r^2}\,dr = -\,kqQ\left(0 - \frac{1}{r}\right).$$

Per tant:

$$U = \frac{kQq}{r}\,,$$

i el potencial és

$$V = \frac{kQ}{r}\,.$$

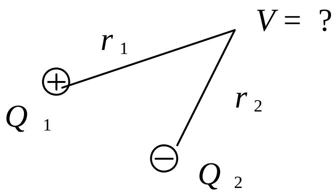
Agafant l'estat final a una distància infinita ($r \to \infty$) a la fòrmula de variació del potencial, obtenim:

$$V(r) = -(0 - V(r)) = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{W_r^{\infty}}{q}\,.$$

Per tant el potencial a un punt és el treball que faria el camp elèctric en portar una unitat de càrrega des del punt en qüestió fins l'infinit.

Finalment, en aplicar el principi de superposició del camp elèctric (secció 5.2), veiem que el potencial a un punt, degut a un conjunt de càrregues, és la suma algebraica de potencials deguts a cadascuna d'elles:

$$V = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \sum \int_r^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \sum V_i = \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} + \ldots$$



En aquesta equació, quan substituïm valors numèrics, cal posar no només els valors absoluts, sinó també ***els signes*** de Q_1, Q_2, etc.

Exemple 5.5

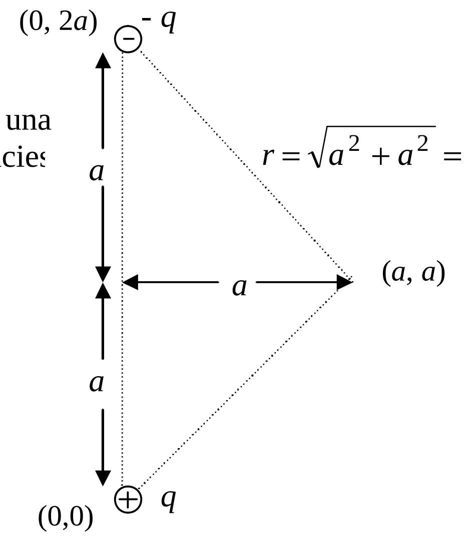
Trobeu el potencial al punt (a,a) si hi ha una càrrega positiva q a (0,0) i una de negativa $-q$ a (0,2a).

Resolució

Com sempre, comencem fent una figura per determinar les distàncies necessàries.

En vista de la figura, tenim que

$$V = V_+ + V_- = \frac{kq}{\sqrt{2}\,a} - \frac{kq}{\sqrt{2}\,a} = 0\,.$$



$$r = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,a$$

Exemple 5.6

Trobeu el potencial al mateix punt que a l'exemple anterior, si la càrrega inferior és 2q en lloc de q.

Resolució

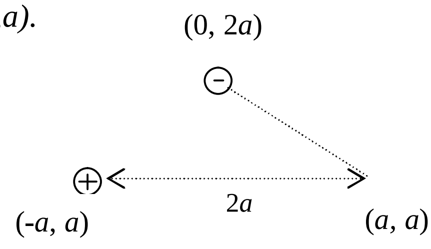
$$V = V_+ + V_- = \frac{k(2q)}{\sqrt{2}\,a} - \frac{kq}{\sqrt{2}\,a} = \frac{kq}{\sqrt{2}\,a}\,.$$

Exemple 5.7

Repetir l'exemple 5.6 suposant que la càrrega 2q és a *(-a,a)*.

Resolució

$$V = V_+ + V_- = \frac{k(2q)}{2\;a} - \frac{kq}{\sqrt{2}\;a} = \frac{kq}{a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

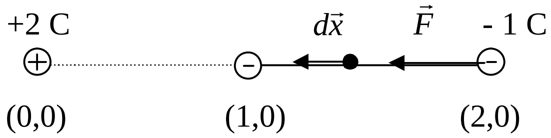


Exemple 5.8

Calculeu el treball fet pel camp elèctric creat per una càrrega de 2 C, situada a l'origen, si fa moure'n una altra de –1 C des de (2 m,0) fins a (1 m,0).

Resolució

A la figura següent il·lustrem la trajectòria de la càrrega negativa (la positiva es suposa fixa), i la direcció i sentit de la força:



Una primera forma de resoldre el problema és la següent:

$$W = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_i^f \left|\vec{F}\right| \, \left|d\vec{x}\right| = -\int_i^f F\, dx\,,$$

on $F = \left|\vec{F}\right|$ i hem tingut en compte que $dx < 0$. Així doncs

$$\text{-}W = +\int_{x=2}^{x=1} \left|\vec{F}\right| dx = \int_2^1 \frac{kq|Q|}{x^2} = -\left[\frac{kq|Q|}{x}\right]_2^1 = -\frac{kq|Q|}{1} + \frac{kq|Q|}{2} = -\frac{kq|Q|}{2} = -9\cdot 10^9\ \text{J}\,.$$

Una segona forma, més senzilla, de resoldre el mateix problema és aplicant el concepte d'energia potencial elèctrica:

$$W = -\Delta U = -\left(U_f - U_i\right) = -\left(\frac{kQq}{1} - \frac{kqQ}{2}\right) = -\frac{kqQ}{2} = +9\cdot 10^9\ \text{J}\,.$$

Problemes

5.13 Per a la distribució de càrregues de l'exemple 5.5, trobeu una expressió per al camp elèctric vàlida a quasevol punt de la part de l'eix *Y* compresa entre les dues càrregues.

5.14 Apliqueu el resultat del problema anterior per a trobar el treball fet pel camp elèctric si mou una càrrega $q' > 0$ del punt $(0, \frac{a}{2})$ al punt (0,*a*).

5.15 Per a la distribució de càrregues de l'exemple 5.5, trobeu el potencial a un punt qualsevol de la part de l'eix *Y* compresa entre q i $-q$.

5.16 Apliqueu el resultat del problema anterior per a trobar l'energia potencial elèctrica d'una càrrega *q'* al mateix punt que el considerat allà.

5.17 Feu servir el resultat del problema anterior per a calcular el treball fet pel camp elèctric en fer moure una càrrega $q' > 0$ de $(0, \frac{a}{2})$ a (0, *a*) (comproveu que dóna el mateix que el problema 5.14, com ha de ser). Trobeu també el camp elèctric.

5.18 Trobeu el potencial (en kilovolts) al punt (1 m,1 m) si hi ha una càrrega puntual de 2 μC a (0,0) i una altra de –3 μC a (2 m,0). Trobeu també el camp elèctric.

5.19 Per a la distribució de càrregues del problema anterior, quin treball (en milijoules) faria el camp elèctric en moure una càrrega de –5 μC de (1 m,1 m) a l'infinit?

5.4 Conductors i dielèctrics

Conceptes bàsics

En els aïllants elèctrics (dielèctrics), els electrons estan retinguts a les molècules, de forma que no es poden moure: fins i tot si introduïm electrons a un dielèctric, no poden travessar els orbitals moleculars. Per tant, en un dielèctric no hi pot haver corrent elèctric. En canvi, als conductors elèctrics (p. ex., metalls) alguns electrons (anomenats lliures) es poden moure, és a dir que hi pot haver corrent elèctric.

Un conductor en equilibri es defineix com aquell en què, en promig, no hi ha moviment de càrregues. Propietats dels conductors en equilibri:

1. A l'interior $\vec{E} = 0$ i V és uniforme.
2. A la superfície $\vec{E}$ és perpendicular a l'àrea local.
3. A qualsevol volum interior, la càrrega neta o total és zero (es troba a la superfície).

El límit de ruptura dielèctica és el valor mínim de $|\vec{E}|$ perquè un dielèctric es torni conductor. Per a l'aire, val uns $3 \cdot 10^6 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 3 \cdot 10^6 \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

Si un dielèctric es coloca a una regió de l'espai on hi ha un camp elèctric, aquest causa una distorsió dels orbitals electrònics (polarització), cosa que fa disminuir el camp:

$$E = \frac{E_0}{k}, \; k > 1,$$

on E_0 és el camp al buit (o, aproximadament, a l'aire) i k s'anomena constant dielèctrica, o permitivitat relativa del dielèctric. La permitivitat absoluta es defineix com

$$e = k \, e_0 ,$$

on e_0 és la permitivitat del buit (vegeu l'apartat 5.1).

Aplicacions: Fotocopiadores i impressores làser

Hi ha vàries formes de convertir un aïllant en conductor. Una ja l'hem explicada: posar l'aïllant en un camp elèctric suficientment intens. Alguns aïllants es tornen conductors en fer-hi incidir llum (materials fotoconductors). Això es fa servir en les fotocopiadores i impressores làser. Hi ha una placa fotoconductora carregada positivament. Es fa incidir llum a tota la placa excepte als llocs corresponents a les lletres o línies de dibuixos. Les zones on incideix llum es tornen conductores, per tant la càrrega es mou i marxa per la connexió amb el terra. Després s'acosta la tinta o tóner, que està carregat negativament, i per atracció electrostàtica es mou cap a les càrregues positives de la placa, quedant dipositada a un full de paper situat abans que arribin a la placa.

Problemes

5.20 Donades dues plaques planes paral·leles, separades per aire, s'observa que en introduir un dielèctric 1 entre elles el camp elèctric es fa una tercera part, i en introduir un altre dielèctric 2 es fa la meitat que a l'aire. Relacioneu les constants dielèctriques dels dos dielèctrics.

5.21 Si mirant cap amunt veiem caure un llamp i comptem 8 segons fins sentir el tro, estimeu a quants kilòmetres d'alçada són els núvols de la tormenta (dada: velocitat del so a l'aire ≈ 335 m/s). Quina de diferència de potencial hi ha entre ells i la Terra?

Solucions

5.1 $\vec{F} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{kqq'}{a^2}, -\frac{kqq'}{4a^2} \right)$,

5.2 $\vec{F} = (-25.6\ \mathrm{N}, 18.5\ \mathrm{N})$

5.3 $\vec{F}_{\text{dreta}} = \left(-\frac{kqQ}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad 0 \right)$, $\vec{F}_{\text{esquerra}} = \left(\frac{kqQ}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad 0 \right)$, $\vec{F}_{\text{superior}} = \left(0, \quad -\frac{4kqQ}{3a^2} \right)$,

$\vec{F}_{\text{total}} = \left(0, \quad -\frac{4kqQ}{3a^2} \right)$

5.4 $(0, \ -7.79 \cdot 10^6 \ \mathrm{N})$

5.5 $\vec{E} = \left(-\frac{kq}{\sqrt{2}\,a^2}, 0 \right)$

5.6 $\vec{E} = \left(\frac{kq}{2\sqrt{2}\,a^2}, \ \frac{3kq}{2\sqrt{2}\,a^2} \right)$

5.7 $\vec{E} = (0,0)$

5.8 $\vec{E} = \left(0, \ -\frac{4kq}{3\,a^2} \right)$

5.9 $\vec{F} = \left(0, \ -\frac{4kqQ}{3a^2} \right)$, $\vec{F}_{3Q} = \left(0, \ -\frac{4kqQ}{a^2} \right)$

5.10 $\vec{E} = (1.59 \cdot 10^4 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}, -3.18 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}})$

5.11 $\left|\vec{E}\right| = 1.62 \cdot 10^4 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$, $q = -11^{\mathrm{o}}\,18' = -0.197$ rad.

5.12 $\vec{E} = (-18\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}, -0.36\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}})$

5.13 $E = \frac{kq}{y^2} + \frac{kq}{(2a-y)^2}$

5.14 $W = \dfrac{4kqq'}{3a}$

5.15 $V = \dfrac{kq}{y} - \dfrac{kq}{(2a-y)}$

5.16 $E_p = \dfrac{kqq'}{y} - \dfrac{kqq'}{(2a-y)}$

5.17 $W = \dfrac{4kqq'}{3a}$

5.18 $V = -6.4$ kV, $E_x = 15909.9$ N/C, $E_y = -3182.0$ N/C,

5.19 $W_r^{\infty} = 32$ mJ

5.20 $k_1 = 1.5\,k_2$

5.21 2.7 km, 8000 milions de volts