TEMA 6 CORRENT CONTINU

Objectius

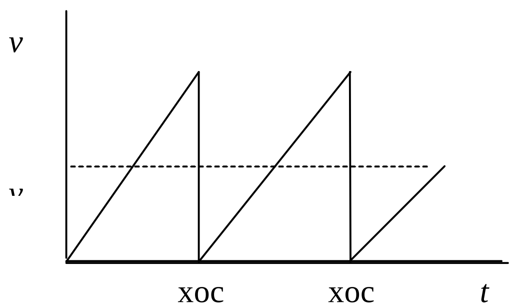
Adquirir nocions bàsiques sobre el corrent elèctric, tant a nivell microscòpic com macroscòpic. Complementar la descripció analítica del corrent i els circuits elèctrics amb una visió qualitativa que permeti treure profit de les analogies amb el moviment, més quotidià, de fluids sense càrrega elèctrica.

Índex

6.1 Moviment de càrregues dins un conductor

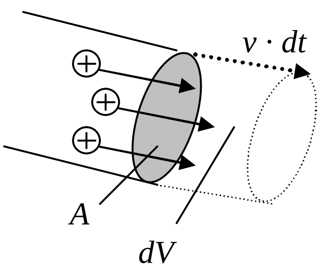
Conceptes bàsics

A la secció 5.4 hem definit els conductors elèctrics com materials en què hi ha càrregues lliures, és a dir càrregues que es mouen, en promig, si el camp elèctric no és zero ($\vec{F} = q\vec{E}$). Això no significa que en presència d'un camp elèctric, les càrregues lliures d'un conductor s'accelerin fins assolir una velocitat arbitràriament gran. De fet, els electrons liures col·lisionen amb els àtoms, que tenen molta més massa, i perden pràcticament tota la seva energia cinètica.



No obstant això, podem assignar una velocitat mitjana, v_m, al corrent elèctric, tal i com il·lustra la figura adjunta. El mateix passa amb les molècules d'un corrent d'aigua o aire: malgrat els xocs moleculars, podem assignat una velocitat mitjana al corrent.

En el corrent elèctric, hi ha el costum d'imaginar que les càrregues en moviment són positives. Es defineix la intensitat I del corrent com la càrrega que travessa una secció transversal A qualsevol del conductor per unitat de temps:



$$I = \frac{\text{càrrega que travessa } A \text{ durant } dt}{dt} = \frac{\text{càrrega a } dV \text{ del dibuix}}{dt} = \frac{n\, q_e\, dV}{dt} \,,$$

on dV és el volum diferencial indicat al dibuix, n és la densitat numèrica de càrregues (normalment electrons), q_e el seu valor (la càrrega de l'electró, en valor absolut) i A la secció del conductor. Sigui v la velocitat mitjana (abans dita v_m). Al dibuix veiem que $dV = A\,(v\,dt)$. Per tant:

$$I = n\, q_e\, A\, v \,.$$

Les unitats de I en sistema internacional és l'ampere (1 A = 1 C/s). Com a exercici, podeu obtenir les unitats de n a partir de l'equació anterior.

Exemple 6.1

Un cable de coure ($n \approx 10^{29}$ electrons/m^3) te un radi $r = 1$ mm. Si hi circula una intensitat de 10 A, quantes hores triga un electró qualsevol en moure's una distància de 2m? Raoneu com pot ser coherent el resultat obtingut amb el fet que quan apretem un interruptor d'una bombeta, aquesta s'encén quasi instantàniament. La càrrega d'un electró és $1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

Resolució

Mentre més ràpid es moguin els electrons, més càrrega circularà. Per això, la intensitat que circula ens permet trobar la velocitat mitjana dels electrons:

$$I = n\, q_e\, A\, v_m \;\rightarrow\; v_m = \frac{I}{n\, q_e A}\,.$$

Aplicant que l'àrea d'una secció circular és $A = \pi\, r^2$,

$$v_m = \frac{10}{10^{29} \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-19}\right) \cdot \pi \left(10^{-3}\right)^2} = \quad 2 \cdot 10^{-4} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Un cop obtinguda la velocitat, podem trobar el temps mig que triga un electró en moure's una distància *d* en direcció longitudinal al llarg del cable:

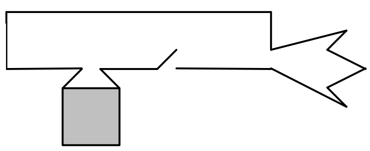
$$v_m = \frac{d}{t} \rightarrow t = \frac{d}{v_m} = \frac{2}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^4\,\text{s}$$

Aquest resultat és molt gran, per tant serà més fàcil d'interpretar si el passem a hores:

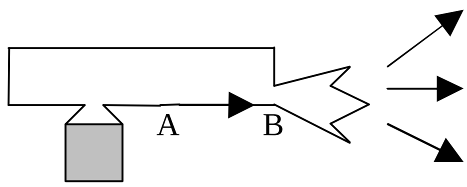
$$t = 10^4\,\text{s} \cdot \frac{1\,\text{minut}}{60\,\text{s}} \cdot \frac{1\,\text{hora}}{60\,\text{minuts}} = 2.8 \approx 3 \text{ hores.}$$

Aparentment no pot ser que un electró inverteixi 3 hores en moure's només 2 metres, perquè això sembla indicar que després d'apretar l'interruptor hauriem d'esperar vàries hores a que s'encengués la bombeta. El motiu rau en que els electrons de tot el cable es posen en moviment, de manera que els que arriben abans són els de la part del cable més propera a la bombeta (punt B a la figura), no els més propers a l'interruptor o la pila (punt A). És semblant al que passa en un embassament d'aigua (vegeu les figures inferiors): les molècules d'aigua que arriben primer no són les properes a la clau de pas (punt C) sinó les del final del embassament (punt D).

Corrent elèctric

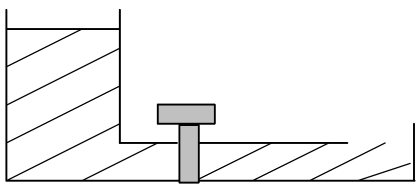


Abans d'apretar l'interruptor (no hi ha corrent d'electrons)

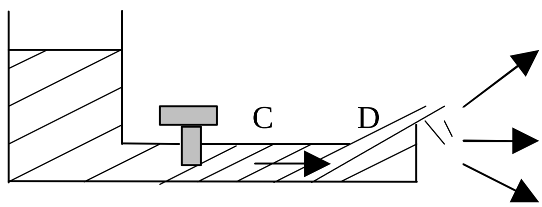


Després d'apretar l'interruptor (la bombeta s'encén)

Corrent d'aigua



Abans d'obrir la clau de pas (no hi ha corrent d'aigua)



Després d'obrir la clau de pas (l'aigua vessa)

Problema

6.1 Per un cable de coure ($n \approx 10^{29}$ electrons/m^3) volem fer circular un corrent elèctric de 6 A. Quina ha de ser la seva velocitat mitjana? Quants electrons travessen una secció qualsevol de cable cada segon? (la càrrega de l'electró és $1.6 \cdot 10^{-19}$ C).

6.2 Llei d'Ohm i efecte Joule

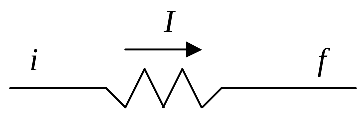
Conceptes bàsics

Una diferència de potencial (que simbolitzarem com $V_i - V_f$, ΔV o simplement V) entre dos punts d'un conductor correspon a un camp elèctric $\vec{E}$ que tendeix a moure les càrregues (recordeu del tema anterior que $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$). Hem fet servir els subíndexs *i* i *j* per a denotar els punts inicial i final en el sentit de moviment de les càrregues positives.

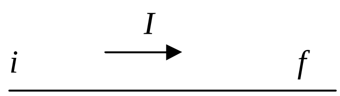
Com succeeix sempre, la relació més senzilla entre causa (en aquest cas, $V_i - V_f$) i efecte (en aquest cas, *I*) és que la causa sigui proporcional a l'efecte,

$$V_i - V_f = R \cdot I ,$$

de forma que no hi ha efecte ($I = 0$) sense causa ($V_i - V_f = 0$), i a major causa, major és l'efecte. Aquesta és la llei d'Ohm. *R* s'anomena resistència, donat que mentre major sigui *R*, menor serà la intensitat del corrent per a un valor donat de *V*. La seva unitat és l'ohm (Ω). És a dir, 1 Ω = 1 V / A (un ohm és un volt per ampere).



Representació d'un tros de cable conductor (rep el nom de resistència, i te el símbol R)



Representació d'un tros de cable conductor amb $R \approx 0$ i, per tant, $V_i \approx V_f$

Per definició, el sentit del corrent elèctric és aquell en que es mouen (o en què es mourien) les càrregues positives. És a dir, el sentit del corrent és oposat al del moviment dels electrons, que són negatius.

És molt important recordar en tot moment que ***el corrent elèctric va sempre dels punts de major cap als de menor potencial.*** Això és pot deduir de l'equació (ja vista a l'apartat 5.3):

$$-\left(V_f - V_i\right) = \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{r} ,$$

però per definició el camp elèctric $\vec{E}$ és la força sobre 1C positiu. D'altra banda, el desplaçament $d\vec{r}$ serà paral·lel a la força. Per tant, són paral·lels el camp $\vec{E}$ i el desplaçament $d\vec{r}$ d'una càrrega positiva (que per definició correspon al sentit del corrent). Així doncs

$$-\left(V_f - V_i\right) > 0 ,$$

i el potencial final és inferior a l'inicial, com volíem demostrar. Veiem que també cal tenir ben clar que, per definició, ***el sentit del corrent és el de les càrregues positives.***

La resistència d'un tros de cable conductor es pot expressar com

$$R = r \frac{l}{A} ,$$

on r és una propietat del material (anomenada resistivitat, unitats Ω·m), *l* la longitud del conductor i *A* la seva secció. A major longitud del cable conductor, major és la resistència que presenta al corrent, mentre que a major secció, menor és la resistència. Això és raonable si ens adonem que el mateix passa amb una tuberia d'aigua.

Tal i com hem indicat al principi d'aquest tema, els electrons col·lisionen amb els àtoms o ions, perdent energia cinètica. Aixó dóna lloc a un escalfament del conductor, de forma que es perd energia en forma de calor (efecte Joule). La potència (energia per unitat de temps) perduda és

$$P_{calor} = V \cdot I = I^2 \cdot R, \qquad \textbf{[vàlid a les resistències]}$$

i les seves unitats en el sistema internacional és el watt (1 W = 1 J/s). Aquí, V és la diferència de potencial entre els punts anterior i posterior a R (com a la figura d'adalt).

Als circuits, l'energia que es perd en forma de calor és subministrada per les piles o generadors, segons l'expressió (en aquest llibre suposem menyspreable la resistència interna de la pila):

$$P_{pila} = V \cdot I = e \cdot I, \qquad \textbf{[vàlid a les piles]}$$

on e s'anomena força electromotriu (f.e.m.) de la pila, i és la diferència de potencial entre els seus pols ($e = V = V_+ - V_-$). Per tant es mesura en volts, no en newtons (no és una força, malgrat el seu nom). Malgrat que en els conductors es mouen càrregues negatives (electrons), per evitar confusions amb els signes sempre ens imaginem (per conveni) que hi ha un corrent (intensitat) de càrregues positives en sentit contrari a aquell en què es mouen els electrons. D'altra banda, és fàcil demostrar que les càrregues positives (i, per tant, la intensitat) sempre van dels punts de major a menor potencial.

Exemple 6.2

Connectem una resistència de 1.5 Ω a una pila de f.e.m. 4.5 V, fent servir cables de resistència menyspreable en comparació amb els 1.5 Ω.

a) Quina intensitat marcarà un amperímetre en aquest circuit?
b) Quanta energia per segon dóna la pila?
c) Quanta energia per segon es dissipa en forma de calor a la resistència?

Resolució

a) $I = \dfrac{V}{R} = \dfrac{4.5}{1.5} = 3$ A.

b) $P_{pila} = e \cdot I = 3 \cdot 4.5 = 13.5$ W.

c) $P_{calor} = I^2 R = 3^2 \cdot 1.5 = 13.5$ W. Veiem que dóna el mateix que b), de forma que l'energia subministrada és igual a la perduda, tal i com ha de ser.

Problemes

6.2 Una instal·lació elèctrica feta amb fil de Coure ($r = 1.7 \cdot 10^{-8}$ Ω·m) de 1.6 mm de diàmetre, te una longitud total de fil de 200 m. Quina és la resistència del fil?

6.3 Un cable conductor te una longitud l_1 i un radi r_1. Si en lloc d'aquest cable en fem servir un altre, fet del mateix material però amb longitud doble i radi també el doble, quin dels dos te major resistència?

6.4 Si connectem els dos cables del problem anterior, cadascun a una pila de 4.5 V, per quin passa més corrent?

6.5 En el cas considerat al problema anterior, per quin cable es perd més energia per unitat de temps?

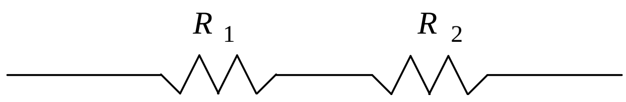
6.6 Una central elèctrica de 60 MW proporciona electricitat a una ciutat. Compareu la pèrdua d'energia, deguda a l'escalfament dels cables entre la central i la ciutat, en els casos següents: a) línies de baixa tensió (220 V), b) línies d'altra tensió (600 000 V).

6.3 Associacions de resistències

Conceptes bàsics

a) Resistències en sèrie:

Per definició, dues resistències estan en sèrie quan totes les càrregues que travessen una d'elles circulen també per la següent. Per exemple:



La definició anterior implica que:

$$I_1 = I_2 .$$

Com veurem, és molt útil considerar una resistència (anomenada equivalent) tal que tingui el mateix efecte que te el conjunt de resistències considerat, és a dir que hi circuli la mateixa intensitat i que causi la mateixa caiguda de potencial:

$$V_{eq} = V_1 + V_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 = I_1 (R_1 + R_2).$$

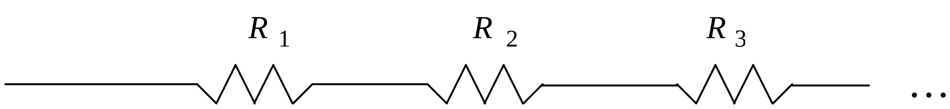
D'altra banda, per la llei d'Ohm:

$$V_{eq} = I_1 \; R_{eq} .$$

Per tant:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

De vegades, en lloc de dues trobarem tres o més resistències en sèrie, per exemple:



En aquest cas tenim que:

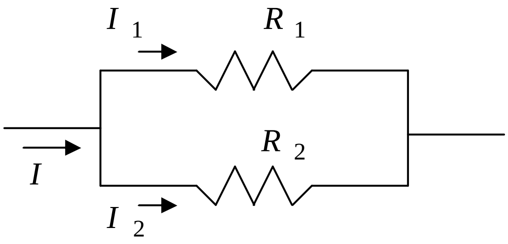
$$I_1 = I_2 = I_3 = \ldots ,$$

i es fàcil veure que:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

b) Resistències en paral·lel:

Per definició, dues resitències sotmeses a la mateixa caiguda de tensió estan en paral·lel. Per exemple:



Tal i com hem indicat a l'apartat 6.2, a aquestes figures les línies rectes representen fils de resistència menyspreable (a diferència de les línies en zig-zag). Tenim que:

$$V_1 = V_2,$$

per tant

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1},\ I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{V_1}{R_2},$$

de forma que, en general:

$$I_1 \neq I_2.$$

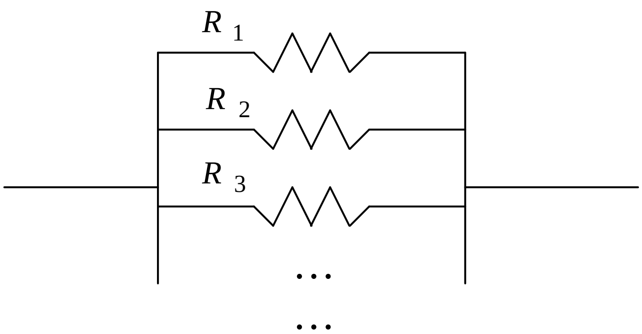
A la figura anterior veiem que totes les càrregues passen per una o altra resistència, és a dir:

$$I = I_1 + I_2.$$

Substituint les equacions anteriors i aplicant el concepte de resistència equivalent ($I = \frac{V_{eq}}{R_{eq}} = \frac{V_1}{R_{eq}}$) obtenim:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

De vegades tenim més de dues resistències en paral·lel. Per exemple:



En aquest cas tenim:

$$V_1 = V_2 = V_3 = \ldots,$$

i la resistència equivalent és:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots$$

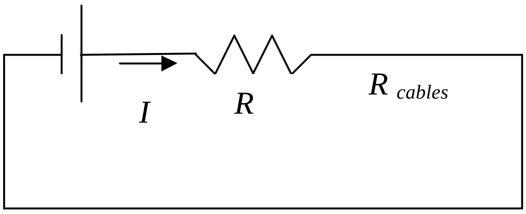
Exemple 6.3

Repetiu l'exemple 6.2 si els cables són de Coure ($r = 1.7 \cdot 10^{-8}$ Ω·m) i tenen un radi de 0.8 m i una longitud total de 100 m.

Resolució

La resistència dels cables és (vegeu l'apartat de teoria 6.2):

$$R_{cables} = r\,\frac{l}{A} = r\,\frac{l}{p\,r^2} = 1.7 \cdot 10^{-8}\,\frac{100}{p\left(0.8 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 0.85\,\Omega$$



En el dibuix adjunt representem el circuit, d'acord amb l'enunciat del problema (les dues línies verticals representen la pila: la més llarga representa el pol positiu). Tenim dues resistències en sèrie, per tant:

$$R_{eq} = R_{cables} + R = 0.85 + 1.5 = 2.35\,\Omega.$$

Ara podem resoldre el problema de la mateixa forma que a l'exemple 6.2, però fent servir la resistència equivalent a les dues que tenim al circuit:

a) $I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{4.5}{2.35} = 1.91$ A.

b) $P_{pila} = e \cdot I = 1.91 \cdot 4.5 = 8.6$ W.

c) $P_{calor} = P_{calor\ R} + P_{calor\ cables} = I^2 R + I^2 R_{cables} = I^2\left(R + R_{cables}\right) = 1.91^2 \cdot 2.35 = 8.6$ W.

Aquest resultat és igual que el de l'apartat b), com ha de ser (l'energia subministrada és sempre igual a la perduda).

Exemple 6.4

Connectem tres resistències, de 1 Ω, 2 Ω i 3 Ω, en paral·lel. Si la pila que dóna el corrent és de 9 V,

a) trobeu les diferències de potencial i les intensistats a totes les resistències
b) determineu la intensitat donada per la pila, sense trobar la resistència equivalent
c) determineu la intensitat donada per la pila, trobant i aplicant la resistència equivalent

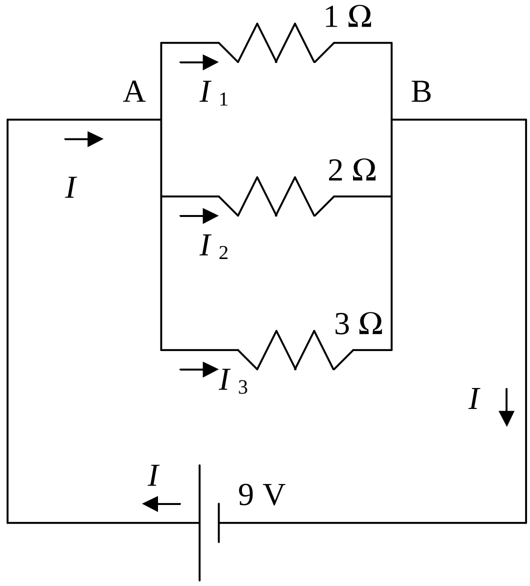
Resolució

a) Abans de res, representem el circuit orresponent a l'enunciat del problema (vegeu la figura adjunta).

Com no ens donen la resitència del cable, suposem el seu efecte menyspreable en comparació amb les de 1 Ω, 2 Ω i 3 Ω. Llavors $V_{AB} \approx 9$ V i tenim que:

$V_1 = 9$ V, $V_2 = 9$ V, $V_3 = 9$ V.

Les intensitats són:



$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{9}{1} = 9 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{9}{2} = 4.5 \text{A},$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ A}.$$

b) La intensitat donada per la pila és:

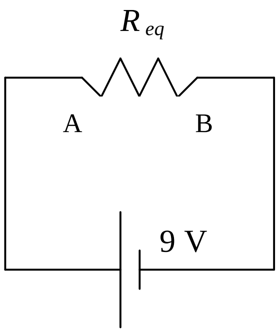
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 16.5 \text{ A}.$$

c) Donat que es tracta d'una connexió en paral·lel,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{1\,\Omega} + \frac{1}{2\,\Omega} + \frac{1}{3\,\Omega} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6}\Omega^{-1},$$

de forma que

$$R_{eq} = \frac{6}{11}\Omega.$$

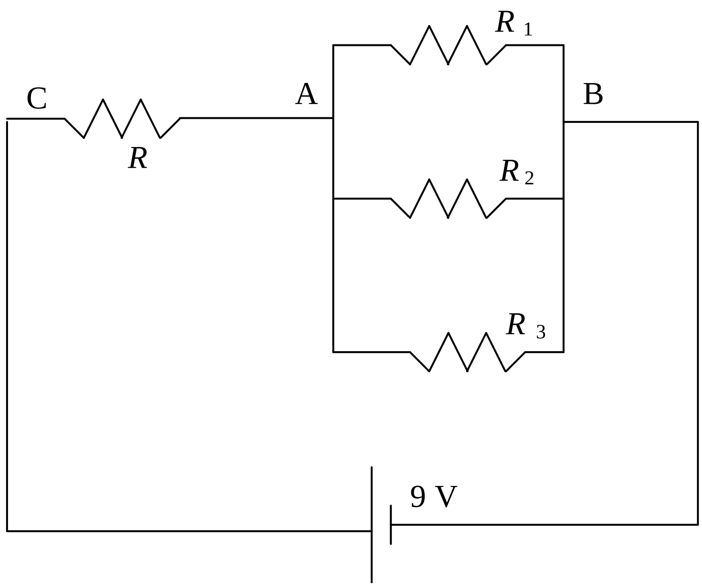


Així doncs, el circuit representat a l'apartat a) és equivalent al de la figura adjunta. La intensitat és

$$I = \frac{V_{AB}}{R_{eq}} = \frac{9}{6/11} = \frac{99}{6} = 16.5 \text{ A},$$

que és el mateix resultat que a l'apartat b), com ha de ser.

Exemple 6.5



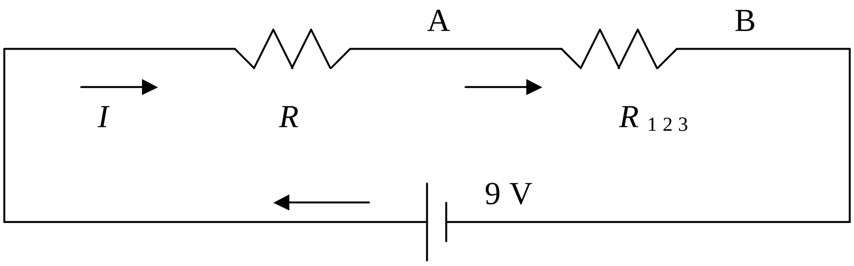
Trobeu les intensitats al circuit de la figura ($R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R = 1\Omega$).

Resolució

En aquest cas $V_{AB} \neq 9$ V perquè hi ha la resistència R (a diferència de l'exemple anterior): en efecte, en vista de la figura tenim que:

$$9\text{ V} = V_{CB} = V_{CA} + V_{AB} \neq V_{AB}\,.$$

La pila sempre tendeix a donar intensitat del costat positiu (línia més llarga) cap al negatiu (línia mé curta). Ho indiquem a la figura següent:



Busquem la resistència equivalent al conjunt format per R_1, R_2 i R_3:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\,.$$

Ja hem fet aquest càlcul a l'exemple anterior. El resultat és:

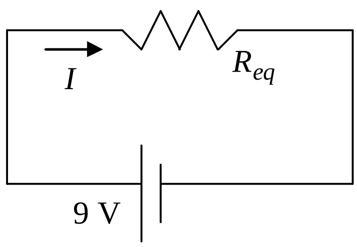
$$R_{123} = \frac{6}{11}\ \Omega.$$

Al dibuix anterior veiem que R és en sèrie amb R_{123}. Per tant:

$$R_{eq} = R + R_{123} = 1 + \frac{6}{11} = \frac{11}{11} + \frac{6}{11} = \frac{17}{11}\ \Omega,$$

i tenim el circuit equivalent dibuixat a continuació. La intensitat és:

$$I = \frac{9\text{ V}}{R_{eq}} = \frac{99}{17}\ \text{A}.$$



Per a trobar les altres intensitats, cal saber abans la diferència de potencial a R_1, R_2 o R_3, que és (vegeu la segona figura d'aquest exemple):

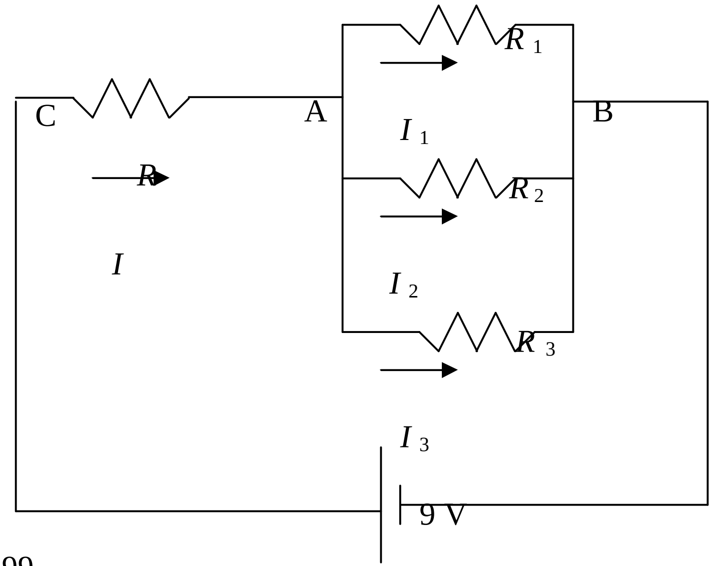
$$V_{AB} = R_{123} I = \frac{6}{11}\cdot\frac{99}{17} = \frac{54}{17}\ \text{V},$$

i ara podem determinar les intensitats que circulen per R_1, R_2 i R_3 (cal indicar-ne els sentits mitjançant una figura, tal i com fem a continuació):

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} = \frac{54}{17} \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{54}{34} \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{V_{AB}}{R_3} = \frac{54}{17 \cdot 3} = \frac{18}{17} \text{ A}.$$



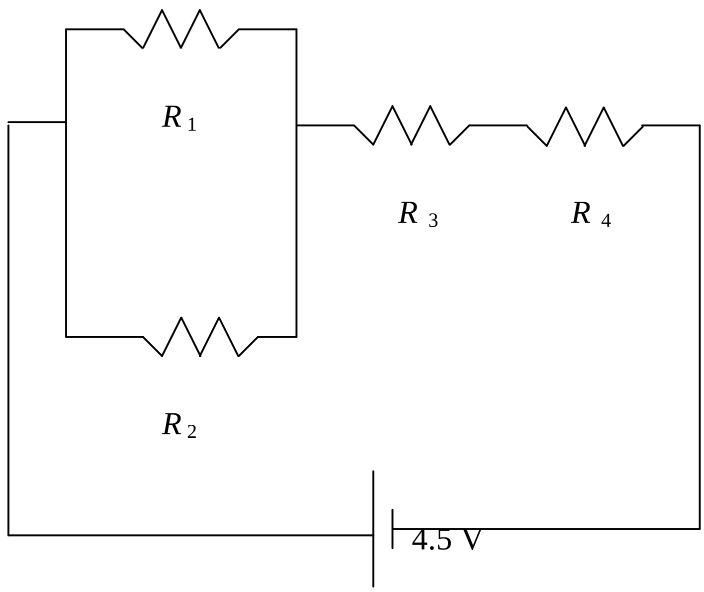
Sempre val la pena comprovar els càlculs.
Comprovem que $I = I_1 + I_2 + I_3$:

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{54 \cdot 6 + 54 \cdot 3 + 54 \cdot 2}{17 \cdot 6} = \frac{99}{17} \text{ A} = I,$$

com ha de ser.

Problemes

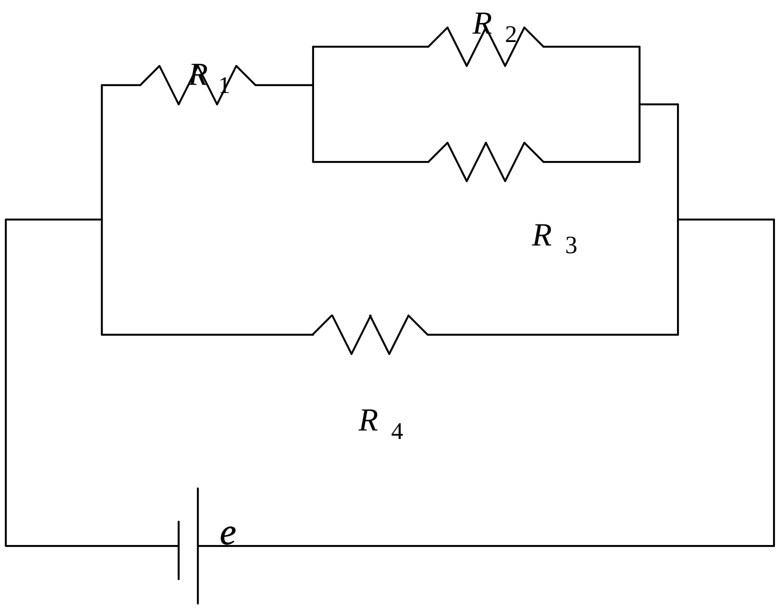
6.7 Trobeu totes les intensitats al circuit de la figura.
Dades:
$R_1 = 1\Omega$,
$R_2 = 0.5\Omega$,
$R_3 = 0.5\Omega$,
$R_4 = 1\Omega$.



6.8 Quina és la caiguda de potencial a cada resitència del problema anterior? I el potencial a cada punt si entre R3 i R4 està connectat el terra (0 Volts)?

6.9 Al problema 6.7, determineu:
a) La potència subministrada per la pila
b) La potència perduda a cada resistència en forma de calor
c) Comproveu que la potència subministrada és igual a la perduda al circuit

6.10 Trobeu totes les intensitats al circuit de la figura.
Dades:
$R_1 = (1/3)\Omega$,
$R_2 = 1\Omega$,
$R_3 = 2\Omega$,
$R_4 = 1\Omega$,
$e = 6\,\mathrm{V}$.



6.11 Comproveu els resultats del problema anterior fent el balanç energètic (potència subministrada = potència perduda)

6.12 Determineu la diferència de potencial entre els extrems de cadascuna de les resistències del problema 6.10. I el potencial a cada punt, si el terra (0 Volts) està connectat al punt comú entre R1, R2 i R3?

6.4 Circuits elèctrics

Conceptes bàsics

Quan hi ha vàries piles, de vegades no és possible sustituir totes les resistències del circuit per una d'equivalent. Llavors aplicarem les regles de Kirchhoff.

Les passes a seguir són:

1) Dibuixar fletxes indicant les intensitats (procurant, si és possible, que vagin en el sentit correcte).

2) Aplicar les regles de Kirchhoff:

2.1) Regla dels nusos: a qualsevol nus (punt on s'uneixen tres o més cables), la suma de les intensitats que entren és igual a la suma de les que surten:

$$\sum_{nus} I_{entren} = \sum_{nus} I_{surten} \, .$$

Aplicarem aquesta regla a diferents nusos, sempre i quan doni lloc a equacions independents.

2.2) Regla de les malles: Donat que a qualsevol malla (trajectòria tancada al llarg de cables) es compleix $\sum \Delta V = 0$, és fàcil veure que es pot aplicar la següent equació:

$$\sum_{malla} \pm e_i = \sum_{malla} \pm I_i R_i \ ,$$

on escriurem $+e_i$ si la pila ***tendeix a donar corrent*** en sentit horari ($-e_i$ en cas contrari), i $+I_i R_i$ si la intensitat I_i ha estat dibuixada en sentit horari ($-I_i R_i$ en cas contrari).

IMPORTANT: El signe de $\pm e_i$ no està relacionat amb la intensitat que passa per la pila (sinó amb cap on tendeix a donar corrent).

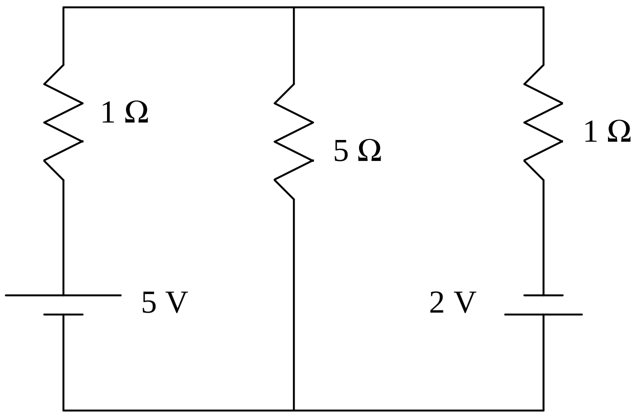
Aplicarem la regla de les malles fins que, juntament amb les equacions obtingudes al pas 2.1), tinguem el mateix nombre d'equacions ***independents*** que d'incògnites.

De vegades no és immediat veure si un conjunt d'equacions són independents o no. Llavors pot ser útil tener en compte que: a) si a una equació surt una incògnita que no sortia a les equacions ja escrites, llavors la nova equació ha de ser independent de les anteriors; b) el número d'equacions independents de malles és igual al número de malles interiors que formen el circuit (sense comptar la malla exterior o que engloba tot el circuit), i restant aquest número al número d'incògnites obtindrem el número de nusos als quals aplicar la regla dels nusos per obtenir equacions independents.

3) Un cop trobades les incògnites, comprovarem que hem resolt be el sistema (sustituïnt a les equacions). A més, si alguna intensitat dóna negativa, indicarem que va en sentit oposat al triat (fent un dibuix), però te el mateix valor absolut (ex: si una intensitat ha estat dibuixada cap a l'esquerra i dóna -6 A vol dir que val 6 A però va cap a la dreta).

Exemple 6.6

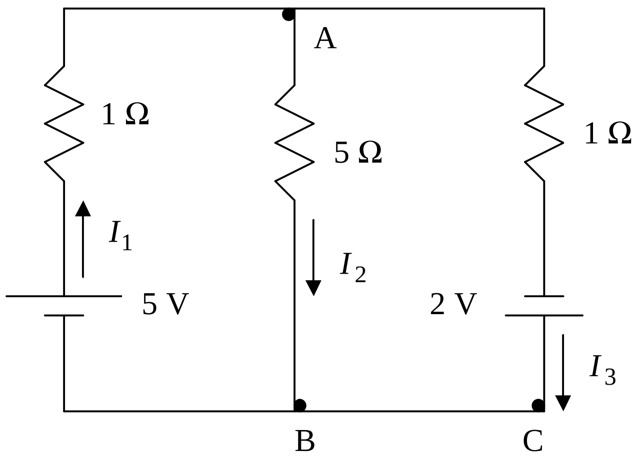
Trobeu totes les intensitats al circuit de la figura



Resolució

La pila de 5 V tendeix a donar corrent cap adalt (perquè sempre tendeixen a donar-lo sortint del pol positiu, que es simbolitza amb una línia més llarga). Per tant, tendeix a fer que el corrent que passa per la resistència de 5 Ω vagi cap avall. Anàlogament, veiem que la pila de 2 V tendeix a fer que el corrent que passa pels 5 Ω vagi cap amunt. Com la pila esquerra (5 V) te més volts que la de la dreta (2 V), hem d'esperar que guanyi l'efecte de la de 5 V, de forma que dibuixarem el corrent als 5 Ω cap avall. Així hem dibuixat les intensitats a la figura adjunta (pas 1 dels esmentats abans).

Pas 1)



Pas 2)

Número d'incògnites: 3 (I_1, I_2, I_3).

Número d'equacions independents de malles: 2 (el circuit és format per 2 malles interiors)

Número d'equacions independents de nusos: $3-2=1$.

Pas 2.1) Regla dels nusos:

Nus A: $\sum_{nus} I_{entren} = \sum_{nus} I_{surten} \;\rightarrow\; I_1 = I_2 + I_3$.

Evidentment podriem considerar el nus B, però obtenim $I_2 + I_3 = I_1$, que és la mateixa equació, de forma que no és independent i per tant no es te en compte. Al punt C clarament també podem plantejar una equació, que és $I_3 = I_3$, però tampoc diu res de nou, per tant no es te en compte. De fet, ja sabiem que només podiem obtenir una equació independent de nusos.

Pas 2.2) Regla de les malles:

Malla esquerra: $\sum_{malla} \pm e_i = \sum_{malla} \pm I_i R_i \;\rightarrow\; 5 = I_1 \cdot 1 + I_2 \cdot 5$.

Malla dreta: $\sum_{malla} \pm e_i = \sum_{malla} \pm I_i R_i \;\rightarrow\; 2 = -I_2 \cdot 5 + I_3 \cdot 1$

Podriem aplicar també la regla de les malles a la malla global, i obtenir $5 + 2 = I_1 \cdot 1 + I_3 \cdot 1$, però aquesta equació és la suma de les dues anteriors: per tant, en no ser independent, no l'aplicarem. De fet ja sabiem que només hi hauria 2 equacions independents de malles.

Així doncs hem obtingut un sistema de 3 equacions independents:

$$I_1 = I_2 + I_3,$$
$$5 = I_1 + 5I_2,$$
$$2 = -5I_2 + I_3,$$

on hi ha tres incògnites (I_1, I_2, I_3). Ara que tenim el mateix número d'equacions *independents* que d'incògnites, podem resoldre el sistema. Per exemple, sustituint la primera equació a la segona, tenim una equació on apareixen I_2 i I_3 però no I_1:

$$5 = 6I_2 + I_3.$$

Restant aquesta equació de la tercera del sistema, aconseguim trobar I_2:

$$-3 = -11\,I_2 \;\rightarrow\; I_2 = \frac{3}{11}\text{ A}.$$

Aquest resultat és positiu, per tant I_2 va en el sentit suposat a la figura anterior.

La segona equació del sistema permet trobar I_1:

$$I_1 = 5 - 5I_2 = 5 - \frac{15}{11} = \frac{55-15}{11} = \frac{40}{11}\text{ A},$$

i la tercera ens porta al resultat per a I_3:

$$I_3 = 2 + 5I_2 = 2 + \frac{15}{11} = \frac{22+15}{11} = \frac{37}{11}\text{ A}.$$

Pas 3) Finalment, sempre comprovarem que es cumpleix el sistema:

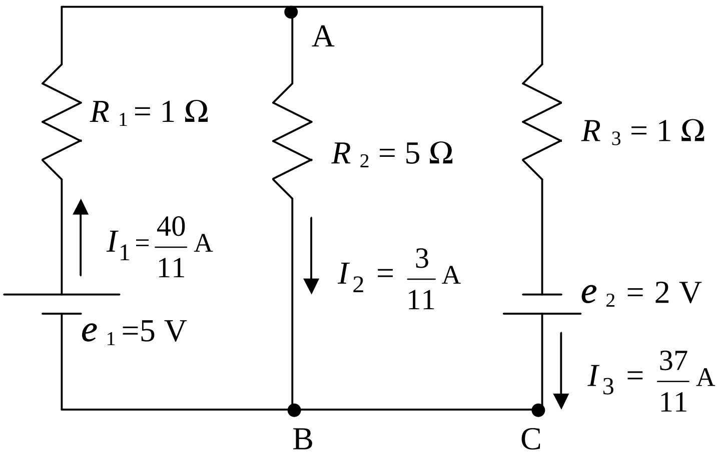
$$I_2 + I_3 = \frac{3}{11} + \frac{37}{11} = \frac{40}{11}\text{A} = I_1 \;\rightarrow \text{be}$$
$$I_1 + 5I_2 = \frac{40}{11} + \frac{15}{11} = \frac{55}{11} = 5 \rightarrow \text{be}$$
$$-5I_2 + I_3 = -\frac{15}{11} + \frac{37}{11} = \frac{22}{11} = 2 \rightarrow \text{be}$$

Exemple 6.7

Comproveu els resultats de l'exemple 6.6 fent el balanç energètic.

Resolució

Indiquem els resultats obtinguts mitjançant la següent figura:



Potència subministrada (nota: ***si una pila tendís a donar corrent al revés*** del sentit que te la intensitat, no subministraria sinó que consumiria energia, de forma que ***posariem un signe negatiu*** al terme corresponent):

$$e_1 I_1 + e_2 I_3 = 5 \cdot \frac{40}{11} + 2 \cdot \frac{37}{11} = \frac{274}{11} = 24.9 \text{ W.}$$

Potència perduda (nota: aquestes potències corresponen a pèrdues de calor i, per tant, ***són sempre positives***, independentment del sentit del corrent):

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 =$$

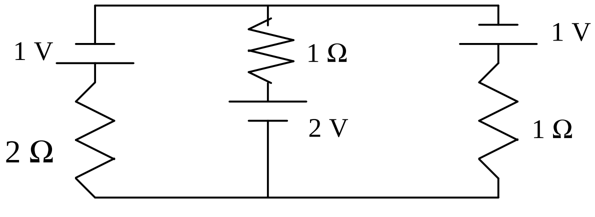
$$\left(\frac{40}{11}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{3}{11}\right)^2 \cdot 5 + \left(\frac{37}{11}\right)^2 \cdot 1 =$$

$$\frac{(40)^2 + 45 + (37)^2}{(11)^2} = \frac{3014}{121} = 24.9 \text{ W.}$$

Veiem que la potència subministrada és igual a la perduda. Per tant es satisfà el balanç energètic, tal i com ha de ser. Adoneu-vos que, si ens haguéssim equivocat en aplicar les regles de Kirchhoff, la comprovació feta al final de l'exemple 6.6 no ens hauria permés detectar el nostre error; en canvi, la potència subministrada no ens donaria igual a la perduda, i d'aquesta forma sí veuriem que hem resolt incorrectament l'exemple 6.6.

Problemes

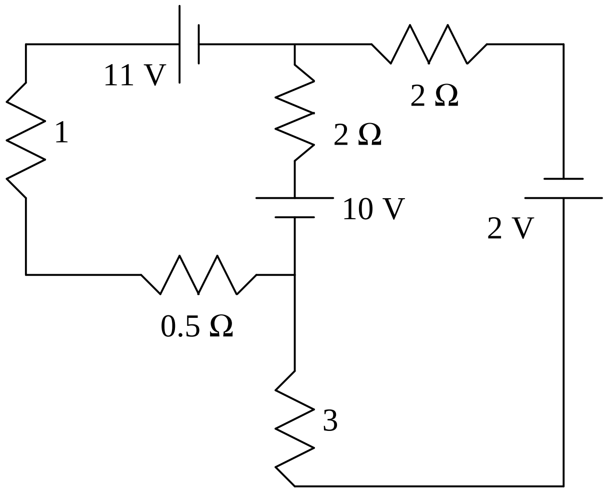
6.13 a) Trobeu les intensitats al circuit de la figura (quan l'hagiu resolt, comproveu que es satisfan les equacions plantejades).



b) Per què la intensitat que dóna la pila esquerra és menor que la que dóna la de la dreta, malgrat que tenen la mateixa força electromotriu?

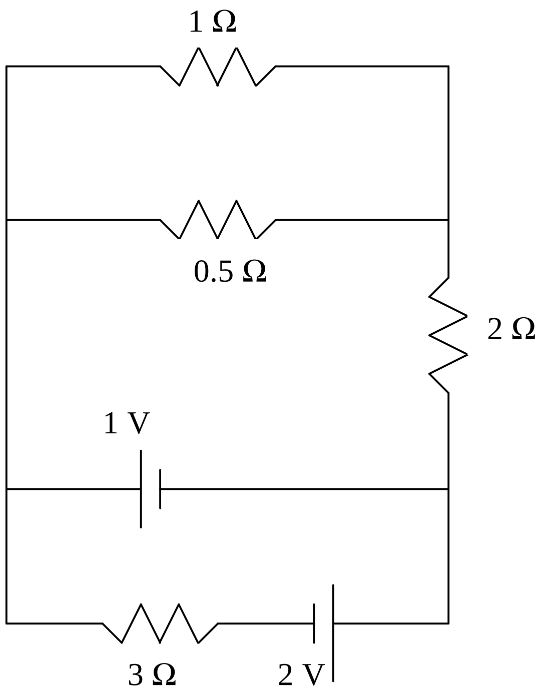
6.14 Fent servir els resultats obtinguts, comproveu que al problema 6.13 la potència subministrada és igual a la perduda per efecte Joule (calor per unitat de temps).

6.15 Determineu el valor de totes les intensitats al circuit següent.



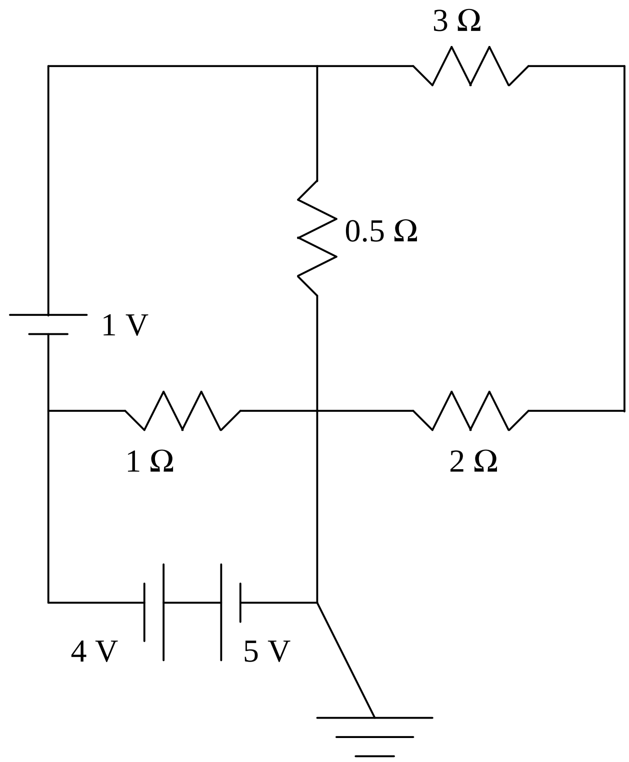
6.16 Demostreu que els resultats del problema 6.15 són correctes, pel mètode de comprobació del balanç energètic.

6.17 Calculeu les intensitats del circuit de la figura següent.



6.18 Comproveu els resultats del problema 6.17, tot comparant la potència subministrada amb la que es perd en forma de calor.

6.19 Trobeu les intensitats que circulen pels components del circuit de la figura. El punt inferior dret està connectat a Terra (això és el que indiquen les tres ratlles horitzontals, i llavors per conveni es diu que el seu potencial és de 0 V, i es suposa que la intensitat que marxa cap a Terra és menyspreable).



6.20 Comproveu que els resultats obtinguts al problema 6.19 són correctes, mitjançant el balanç energètic (recordeu que quan una pila s'oposa al corrent, no dóna energia sinó que en consumeix).

6.21 Trobeu el potencial als punts superior esquerra i superior dret del circuit del problema 6.19.

Solucions

6.1 $v_m = 2.4 \cdot 10^{-4}$ m/s, $3.8 \cdot 10^{19}$ electrons.

6.2 $R = 1.7\ \Omega$.

6.3 $R_2 = \dfrac{R_1}{2}$.

6.4 $I_2 = 2\, I_1$.

6.5 $P_2 = 2\, P_1$.

6.6 Per cada watt que es perd en alta tensió, se'n perden 7 milions en baixa tensió.

6.7 $I_1 = 0.82$ A, $I_2 = 1.64$ A, $I_3 = I_4 = 2.45$ A (totes van cap a la dreta).
Comprovació: $I_1 + I_2 \approx I_3$.

6.8 $V_1 = V_2 = 0.82$ V, $V_3 = 1.23$ V, $V_4 = 2.45$ V (en els quatre casos, el costat dret te menys potencial que el costat esquerra).
Comprovació: $V_1 + V_3 + V_4 = 4.5$ V.

6.9 a) $P_{pila} = 11.03$ W.
b) $P_{R\,1} = 0.67$ W, $P_{R\,2} = 1.34$ W, $P_{R\,3} = 3.00$ W, $P_{R\,4} = 6.00$ W.
c) $11.03 \approx 0.67 + 1.34 + 3.00 + 6.00$.

6.10 $I_1 = 6$ A (cap a l'esquerra), $I_2 = 4$ A (cap a l'esquerra), $I_3 = 2$ A (cap a l'esquerra), $I_4 = 6$ A (cap a l'esquerra), $I_{pila} = 12$ A (cap a la dreta).
Comprovacions: $I_1 = I_2 + I_3$, $I_{pila} = I_1 + I_4$.

6.11 $P_{pila} = 72$ W, $P_{calor} = 12 + 16 + 8 + 36 = 72$ W. Donen el mateix, com ha de ser.

6.12 $V_2 = V_3 = 4$ V, $V_4 = e = 6$ V, $V_1 = 2$ V (en els quatre casos, l'extrem esquerra te menys potencial que el costat dret).
Comprovació: $V_1 + V_2 = V_4 = e$.

6.13 a) $I_{2\Omega} = \dfrac{3}{5}$ A (cap avall), $I_{dreta} = \dfrac{6}{5}$ A (cap avall), $I_{2V} = \dfrac{9}{5}$ A (cap amunt).
b) $I_{2\Omega} < I_{dreta}$ perquè $2\Omega > 1\Omega$ (on 1Ω es refereix a la resistència a la branca dreta).

6.14 $P_{piles} = \dfrac{27}{5}$ W, $P_{calor} = \dfrac{27}{5}$ W. Són iguals, com ha de ser.

6.15 $I_{esquerra} = 6$ A (cap avall), $I_{dreta} = 0$ A, $I_{10V} = 6$ A (cap amunt).

6.16 $P_{piles} = 126$ W, $P_{calor} = 126$ W. Són iguals, com ha de ser, per tant queda comprovat.

6.17 $I_{2\Omega} = \frac{3}{7}$ A (cap avall), $I_{2V} = 1$ A (cap a la dreta), $I_{1V} = \frac{10}{7}$ A (cap a l'esquerra), $I_{1\Omega} = \frac{1}{7}$ A (cap a la dreta), $I_{0.5\Omega} = \frac{2}{7}$ A (cap a la dreta).

6.18 $P_{piles} = \frac{24}{7}$ W. $P_{calor} = \frac{1}{49} + \frac{2}{49} + \frac{18}{49} + 3 = \frac{24}{7}$ W. Donen el mateix, com ha de ser.

6.19 $I_{0.5\Omega} = 4$ A (cap avall), $I_{3\Omega} = I_{2\Omega} = \frac{2}{5}$ A (cap a la dreta), $I_{5V} = I_{4V} = \frac{27}{5}$ A (cap a l'esquerra), $I_{1V} = \frac{22}{5}$ A (cap amunt), $I_{1\Omega} = 1$ A (cap amunt).

6.20 $P_{piles} = \frac{22}{5} + 27 - \frac{4 \cdot 27}{5} = \frac{49}{5}$ W. $P_{calor} = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} + 1 + 8 = \frac{49}{5}$ W. Són iguals, com ha de ser.

6.21 Costat superior esquerra: $V = 2$ V. Costat superior dret: $V = \frac{4}{5}$ V.