TEMA 8 CORRENT ALTERN

Objectius

Entendre el funcionament dels circuits de corrent altern, i la seva representació fasorial. Saber calcular impedàncies complexes en sèrie i en paral·lel. Ser capaç de resoldre circuits bàsics de corrent altern.

Índex

8.1 Circuits R, L i C

Conceptes bàsics

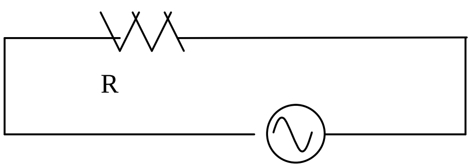
ABANS: Corrent continu $\rightarrow$ fonts de corrent constants (per exemple, piles de 4.5 V).

ARA: Corrent altern $\rightarrow$ fonts de corrent que varien en el temps, p. ex: $e = e_{max} \cos(w\, t)$.

· Pulsació o freqüència angular: $w = \dfrac{2p}{T}$ (unitats: rad/s).

· Freqüència: $f = \dfrac{1}{T}$ (unitats: s^{-1} = Hz).

Circuit R



ε (t) = ε_{max} cos(ω t)

Aplicant la llei d'Ohm, obtenim que:

$$I = \frac{e}{R} = I_{max} \cos(w\, t)\text{, amb } I_{max} = \frac{e_{max}}{R}.$$

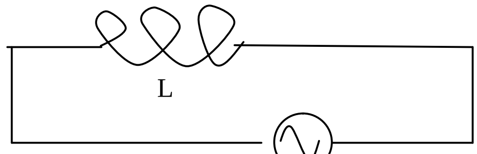
Exemple 8.1

Un circuit R te $e_{max} = 220\sqrt{2}$ V, $f = 50$ Hz i $R = 2\ \Omega$. Trobeu la intensitat en funció del temps i el seu valor per a $t = 4$ s, 4.005 s i 4.01 s.

Solució

$I(t) = 110\sqrt{2}\cos(100p\, t)$, 155.6A, 0 A, -155.6 A.

Circuit L



ε (t) = ε $_{max}$ cos(ω t)

D'acord amb la teoria de magnetisme: $e = L\dfrac{dI}{dt}$,
on L és l'autoinducció, i te unitats Henrys (H).

Integrant obtenim:

$$I = I_{\max}\sin(w\,t)\,,\qquad I_{\max} = \frac{e_{\max}}{X_L}\,,$$

on $X_L = Lw$ és la reactància inductiva (unitats: Ω).

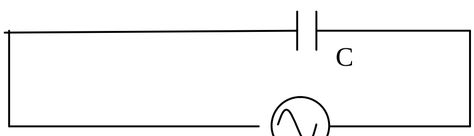
Exemple 8.2

Un circuit L te $e_{\max} = 220\sqrt{2}$ V, $f = 50$ Hz i $X_L = 2\,\Omega$. Trobeu la intensitat en funció del temps i el seu valor per a $t = 4$ s.

Solució

$I(t) = 110\sqrt{2}\sin(100p\ t)$, 0 A.

Circuit C



ε (t) = ε $_{max}$ cos(ω t)

D'acord amb la teoria de condensadors: $\int I\,dt = Ce$,
on L és la capacitat, i te unitats Farads (F).

Per tant:

$$I = \frac{d(C\,e)}{dt} = -I_{\max}\sin(w\,t)\,,$$

$$I_{\max} = \frac{e_{\max}}{X_C}\,,$$

on $X_C = \dfrac{1}{Cw}$ és la reactància capacitativa (unitats: Ω).

Exemple 8.3

Un circuit C te $e_{\max} = 220\sqrt{2}$ V, $f = 50$ Hz i $X_C = 3\,\Omega$. Trobeu la intensitat en funció del temps.

Solució

$$I(t) = \frac{-220\sqrt{2}}{3}\sin(100p\ t)\,.$$

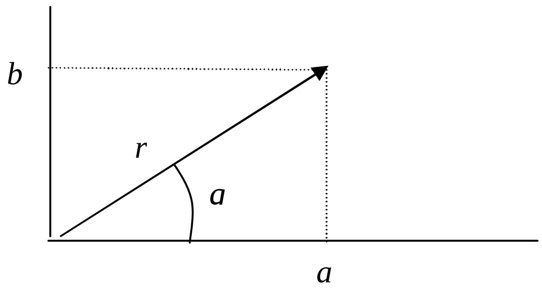
Resum

R	L	C
$I = I_{\max}\cos(w\,t)$	$I = I_{\max}\sin(w\,t) =$ $= I_{\max}\cos(w\,t - \frac{p}{2})$	$I = -I_{\max}\sin(w\,t) =$ $= I_{\max}\cos(w\,t + \frac{p}{2})$

8.2 Números complexes

$i = \sqrt{-1} \rightarrow j = \sqrt{-1}$ en electricitat.

Notacions binòmica, cartesiana i polar: $a + bj = (a,b) = r_q$



$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan q = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = r\cos q \\ b = r\sin q \end{cases}$$

Per a sumar i restar, es fa en forma binòmica. Multiplicar i dividir sol ser més ràpid en polar.
Producte: $r_q s_j = (r \cdot s)_{q+j}$.

Quocient: $\dfrac{r_q}{s_j} = \left(\dfrac{r}{s}\right)_{q-j}$; $\dfrac{a+bj}{c+dj} = \dfrac{a+bj}{c+dj}\dfrac{c-dj}{c-dj} = \dfrac{ac - bdj^2 - adj + bcj}{c^2 - d^2 j^2} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)\,j}{c^2+d^2}$.

Exemple 8.4

Expresseu el número complex $2 - 3j$ en forma polar

Solució

$2 - 3j = 3.6_{-0.98\ \text{rad}}$

Exemple 8.5

Expresseu el número complex $3_{-p/4}$ en forma binòmica

Solució

$3_{-p/4} = 2.12 - 2.12j$

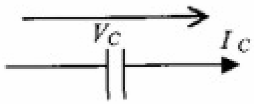
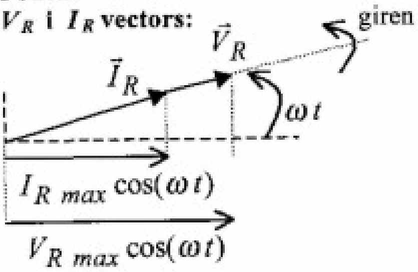
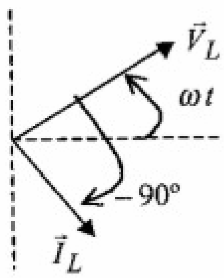
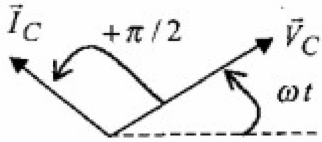
8.3 Representació fasorial i complexa del corrent altern

La desenvolupem, pas a pas, a la pàgina següent.

No són altra cosa que definicions que ens facilitaran els càlculs.

4

CORRENT ALTERN (Components bàsics)

Resistència	**Bobina**	**Condensador**
 Si $V_R = V_{R\,max}\cos(\omega t)$ $I_R = \frac{V_R}{R} = I_{R\,max}\cos(\omega t)$ $I_{R\,max} = \frac{V_{R\,max}}{R}$	 Si $V_L = V_{L\,max}\cos(\omega t)$ $I_L = I_{L\,max}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ $I_{L\,max} = \frac{V_{L\,max}}{X_L} = \frac{V_{L\,max}}{L\omega}$	 Si $V_C = V_{C\,max}\cos(\omega t)$ $I_C = I_{C\,max}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ $I_{C\,max} = \frac{V_{C\,max}}{X_C} = \frac{V_{C\,max}}{1/(C\omega)}$
Podem associar a V_R i I_R vectors: 		
Podem associar a V_R i I_R complexes: $\bar{I}_R = I_{R\,max}\ \angle\omega t$ $\bar{V}_R = V_{R\,max}\ \angle\omega t$ **Parts reals:** $\mathrm{Re}(\bar{I}_R) = I_{R\,max}\cos(\omega t) = I_R$ $\mathrm{Re}(\bar{V}_R) = \ldots = V_R$	$\bar{I}_L = I_{L\,max}\ \angle\omega t - \frac{\pi}{2}$ $\bar{V}_L = V_{L\,max}\ \angle\omega t$ $\mathrm{Re}(\bar{I}_L) = I_{L\,max}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ $\mathrm{Re}(\bar{I}_L) = I_L$ $\mathrm{Re}(\bar{V}_L) = \ldots = V_L$	$\bar{I}_C = I_{C\,max}\ \angle\omega t + \frac{\pi}{2}$ $\bar{V}_C = V_{C\,max}\ \angle\omega t$ $\mathrm{Re}(\bar{I}_C) = I_{C\,max}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ $\mathrm{Re}(\bar{I}_C) = I_C$ $\mathrm{Re}(\bar{V}_C) = \ldots = V_C$
$\bar{I}_R = I_{R\,max}\ \angle\omega t = \left(\frac{V_{R\,max}}{R}\right)_{\angle\omega t}$ $\bar{I}_R = \frac{(V_{R\,max})_{\angle\omega t}}{R_{\angle 0°}} = \frac{\bar{V}_R}{R}$	$\bar{I}_L = \left(\frac{V_{L\,max}}{X_L}\right)_{\angle\omega t - \frac{\pi}{2}}$ $\bar{I}_L = \frac{V_{L\,max\angle\omega t}}{X_{L\angle\frac{\pi}{2}}} = \frac{\bar{V}_L}{\bar{X}_L}$	$\bar{I}_C = \left(\frac{V_{C\,max}}{X_C}\right)_{\angle\omega t + \frac{\pi}{2}}$ $\bar{I}_C = \frac{V_{C\,max\angle\omega t}}{X_{C\angle -\frac{\pi}{2}}} = \frac{\bar{V}_C}{\bar{X}_C}$
Definim la impedància $\bar{Z} = \bar{V}/\bar{I}$: $\bar{Z}_R = \frac{\bar{V}_R}{\bar{I}_R} = R = R_{\angle 0°} = R + 0j$ $(j = \sqrt{-1})$	$\bar{Z}_L = \frac{\bar{V}_L}{\bar{I}_L} = \bar{X}_L = X_{L}\ \angle\frac{\pi}{2}$ $\bar{Z}_L = 0 + jX_L = jX_L = jL\omega$	$\bar{Z}_C = \frac{\bar{V}_C}{\bar{I}_C} = \bar{X}_C = X_{C}\ \angle -\frac{\pi}{2}$ $\bar{Z}_C = 0 - jX_C = -jX_C = \frac{-j}{C\omega}$

comentaris: joaquim.fort@udg.es

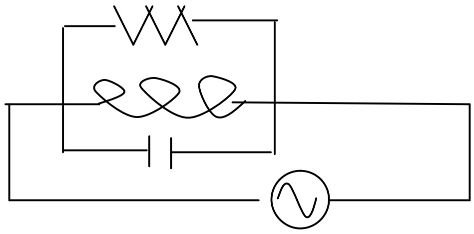
Exemple 8.6

Al circuit de la figura $I_{R\,\max} = 1\,\text{A}$, $R = 10\Omega$, $C = 10^{-5}\,\text{F}$, $L = 1\,\text{H}$, $w = 100p$ rad/s.

Trobeu el potencial i les intensitats, de dues formes:

a) sense aplicar números complexos.

b) Aplicant la llei d'Ohm complexa: $\overline{V} = \overline{I}\ \overline{Z}$.



ε (t) = ε max cos(ω t)

Solució

b) $I_R = 1\cos(100p\ t)$.

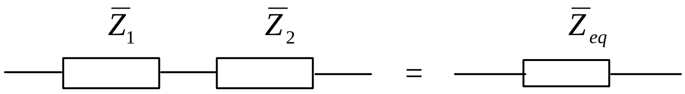
$\overline{V} = \overline{I}\ \overline{Z} = 1_{wt} \cdot 10 \rightarrow V(t) = 10\text{V}\cos(100p\ t)$.

$\overline{I}_L = \dfrac{\overline{V}}{\overline{Z}_L} = 0.0318_{wt-p/2} \rightarrow I_L = 0.0318\text{A}\cos(100p\ t - \dfrac{p}{2})$.

$\overline{I}_C = \dfrac{\overline{V}}{\overline{Z}_C} = 0.0314_{wt+p/2} \rightarrow I_C = 0.0314\text{A}\cos(100p\ t + \dfrac{p}{2})$.

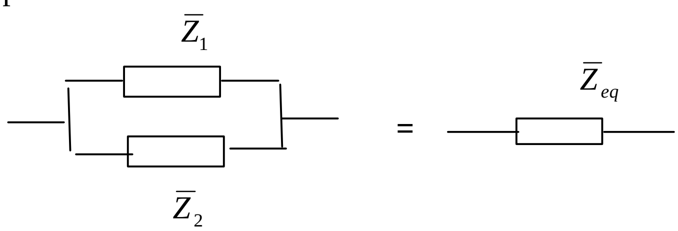
8.4 Impedàncies en sèrie i en paral·lel

· En sèrie:



$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 = \overline{I}\ \overline{Z}_1 + \overline{I}\ \overline{Z}_2$ $\qquad$ $\overline{V} = \overline{I}\ \overline{Z}_{eq}$ $\qquad \rightarrow \qquad$ $\overline{Z}_{eq} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2$

· En paral·lel:



$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = \dfrac{\overline{V}}{\overline{Z}_1} + \dfrac{\overline{V}}{\overline{Z}_2}$ $\qquad$ $\overline{I} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{Z}_{eq}}$ $\qquad \rightarrow \qquad$ $\dfrac{1}{\overline{Z}_{eq}} = \dfrac{1}{\overline{Z}_1} + \dfrac{1}{\overline{Z}_2}$

Exemple 8.7

Calculeu la impedància d'un circuit RLC sèrie, en forma binòmica i polar.

Solució

Binòmica: $\overline{Z}_{eq} = \overline{Z}_R + \overline{Z}_L + \overline{Z}_C = R + j\left(X_L - X_C\right)$.

Polar: Z_d, amb $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ i $\tan d = \dfrac{X_L - X_C}{R}$.

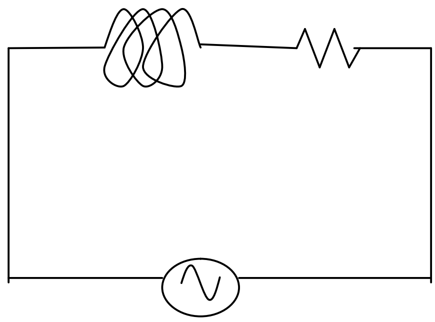
Problemes

8.1. Un condensador de 50 μF de capacitat i una bobina de 0,01 H d'autoinducció estan connectats en sèrie en un circuit de corrent altern de 100 Hz de freqüència. Calculeu la impedància del circuit.

8.2. Una resistència de 4 Ω, un condensador de 54 μF de capacitat i una bobina de 0,04 H d'autoinducció estan connectats en sèrie en un circuit de corrent altern de 50 Hz de freqüència. Calculeu la impedància del circuit.

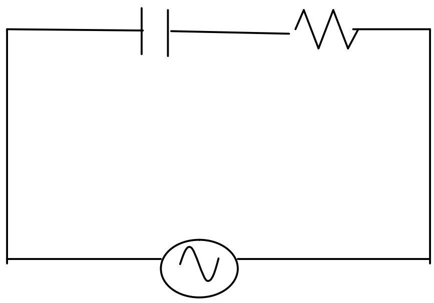
8.3 Al circuit de la figura, R = 1Ω, X_L =2Ω, $e_{max} = 220\sqrt{2}$ V, f = 50 Hz.

Trobeu la intensitat en funció del temps.



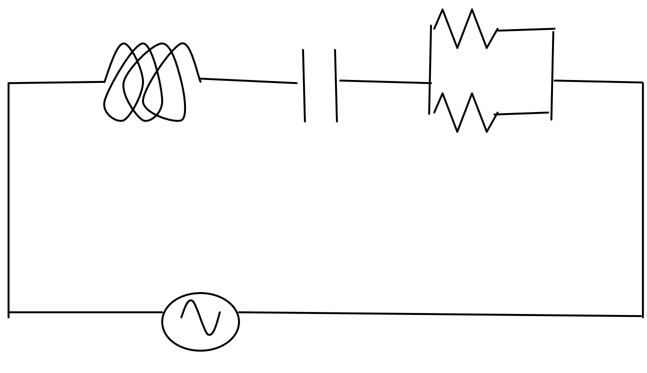
8.4 Al circuit de la figura, R = 2Ω, X_C =3Ω, $e_{max} = 220\sqrt{2}$ V, f = 50 Hz.

Trobeu les intensitats i potencials en funció del temps.



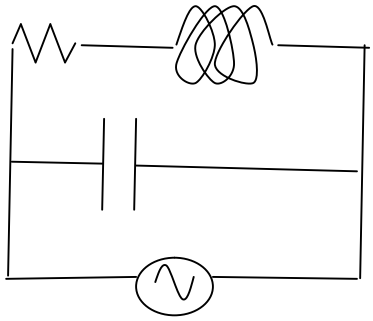
8.5 Al circuit de la figura, R_1 = 3000Ω, R_2 = 600Ω , L =10/π H, C= $20\cdot10^{-6}/\pi$ F, $e = 250\sqrt{2}$ V sin(100π t).

Trobeu les intensitats en funció del temps.



8.6 Al circuit de la figura, R = 10Ω, X_L =20Ω, X_C =30Ω , e_{max} = 220 V, f = 50 Hz.

Trobeu les intensitats en funció del temps.



Solucions

8.1. Z = 25,5 Ω, δ = - π/2 rad.

8.2. Z = 46,55 Ω, δ = -1,48 rad.

8.3 $I(t) = 139.14\text{ A}\cos(100p\ \text{t} - 1.107)$.

8.4 $I(t) = 86.18\text{ A}\cos(100p\ \text{t} + 0.98)$,

$V_R(t) = 172.36\text{ V}\cos(100p\ \text{t} + 0.98)$,

$V_C(t) = 258.54\text{ V}\cos(100p\ \text{t} + 0.98 - \frac{p}{2})$.

8.5 $I_L(t) = I_C(t) = 0.5\text{ A}\cos(100p\ \text{t} - \frac{3p}{4})$,

$I_{R1}(t) = 0.083\text{ A}\cos(100p\ \text{t} - \frac{3p}{4})$,

$I_{R2}(t) = 0.417\text{ A}\cos(100p\ \text{t} - \frac{3p}{4})$.

8.6 $I_L(t) = I_R(t) = 9.84\text{ A}\cos(100p\ \text{t} - 1.1)$,

$I_C(t) = 7.33\text{ A}\cos(100p\ \text{t} + \frac{p}{2})$.